SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Kristina Katušić

GEOMETRIJA ZLATNOG REZA

Diplomski rad

Osijek, 2017.

SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

SMJER: Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Kristina Katušić

Diplomski rad

Geometrija zlatnog reza

Voditelj diplomskog rada: prof. dr. sc. Zdenka Kolar-Begović

Osijek, 2017.

Sadržaj

Uvod **2**

1 Povijest zlatnog reza **3**

2 Definicija i numerička vrijednost **6**

3 Konstrukcije zlatnog reza **11**

4 Zlatna planimetrija i stereometrija **21**

4.1 Zlatni pravokutnik 21
4.2 Zlatna spirala 24
4.3 Zlatni trokut 27
4.4 Zlatni peterokut i pentagram 30
4.5 Zlatni kut 36
4.6 Zlatni poliedri 36

5 Zanimljive pojave zlatnog reza **40**

6 Zaključak **45**

Sažetak **46**

Summary **46**

Literatura **47**

Životopis **48**

Uvod

Težnja je čovjeka biti okružen oku ugodnim stvarima i djelima. Rezultati brojnih istraživanja pokazuju da prilikom izbora likova kao oku ugodnih, omjeri odgovorajućih dužina su približno jednaki jednoj konstanti, broju. Kroz povijest taj se broj nazivao zlatna sredina, božanska proporcija, Phidiasova srednja vrijednost, a danas je najpoznatiji kao zlatni rez. Oznaka za taj broj je ϕ, prema prvom slovu imena grčkog kipara Fidija (Phidiasa) koji je ovaj broj koristio pri kompoziciji svojih građevina, no često možemo pronaći da se označava i sa τ što dolazi od grčke riječi "tome", što znači rezati. Kažemo da je dužina podijeljenja u omjeru zlatnog reza, ako je omjer duljine većeg dijela dužine prema duljini manjeg dijela jednak omjeru duljine cijele dužine prema duljini većeg dijela. Taj omjer je jednak vrijednosti iracionalnog broja $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

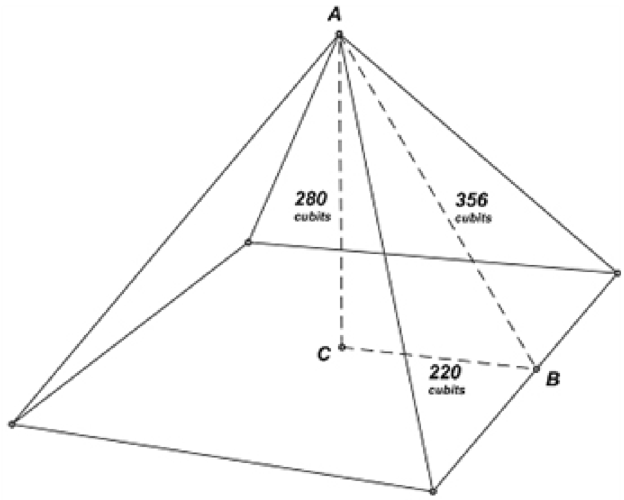
Zlatni rez susreće se još od vremena antike, a susreće se u arhitekturi, slikarstvu, kiparstvu, glazbi, a u novije vrijeme čak i u modernoj tehnologiji. Njega opisuju kao oku ugodan omjer. Navedimo rečenicu poznatog astronama i matematičara Johannesa Keplera: *"Geometrija ima dvije dragocjenosti: Pitagorin teorem i zlatni rez."* Upravo ovom rečnicom naglašena je prisutnost i ljepota ovog pojma.

Prva knjiga posvećena zlatnom rezu je objavljena 1509. godine. To je knjiga *De Divina Proportione* talijanskog matematičara L. Paciolia. Taj broj je pobudio veliki interes u matematičkom svijetu jer ima vrlo zanimljiva svojstva.

U ovom diplomskom radu bit će razmatrana značajna svojstva zlatnog reza. Elementi iz povijesti prisutnosti ove konstante bit će navedeni. Osim toga, bit će prikazane i neka konstrukcije zlatnog reza, od jedne od prvih konstrukcija koja se nalazi u Euklidovim *Elementima* do konstrukcije za koju je potreban samo šestar.

1 Povijest zlatnog reza

U ovom poglavlju navest ćemo značajne elemente iz povijesti zlatnog reza. Ne može se reći sa sigurnošću kada se zlatni rez prvi puta pojavio u civiliziranom svijetu. Ono što se prema dosadašnjim saznanjima može reći je da se prvi put pojavljuje u Starom Egiptu pri konstrukciji Keopsove piramide u Gizi, jednog od sedam svjetskih čuda koje i dan danas postoji. No, i danas se još ne zna je li arhitekt Hemiunu baš predvidio dimenzije piramide u omjeru zlatnog reza. Četiri su godine arheolozi proučavali tu piramidu i izvana i iznutra. Promatrajući vanjske dimenzije piramide na različite se načine može uočiti pojava zlatnog reza, broja ϕ. Razmotrit ćemo neke prisutnosti zlatnog reza. Prvo treba naglasiti da su dimenzije piramide izražene u cubitima. To je mjerna jedinica koja se u to vrijeme i koristila, a bazirala se na duljini određenoj udaljenošću lakta i vrha srednjeg prsta (oko 52.25 cm).



Slika 1.1: Keopsova piramida

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{h_\Delta}{a/2} = \frac{356}{220} \approx 1.618181...$$

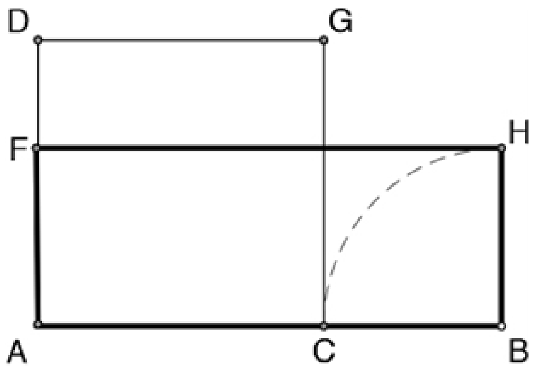
Kako se vidi na slici 1.1 visina piramide je 280 cubita, polovina duljine brida baze je 220 cubita i duljina visine pobočke je 356 cubita. Omjer polovine duljine brida baze i visine pobočke je približno jednak vrijednosti zlatnog reza. Kada se gleda omjer visine piramide i polovine duljine brida baze dobije se vrijednost koja odgovara korijenu broja ϕ $(1.27272\ldots)$. Primjenom današnjih mogućnosti za mjerenje, Keopsova piramida ima sljedeće dimenzije:

Stranice baze (a)	Visina pobočke (h_Δ)	Visina piramide (h_p)	$h_\Delta/\frac{a}{2}$
230.56 m	186.54 m	146.45 m	1.61813471 ($\approx \phi$)

Je li arhitekt stvarno samim dizajnom odredio da piramida bude takva, nemoguće je znati. Ovdje je istaknuto ono što se mjerenjem može dobiti.

U povijesti zlatnog reza, sljedeće značajno otkriće vezano je za Pitagorejce, koji su zlatni rez uz mnoge druge primjene, koristili u svojim glazbenim istraživanjima.

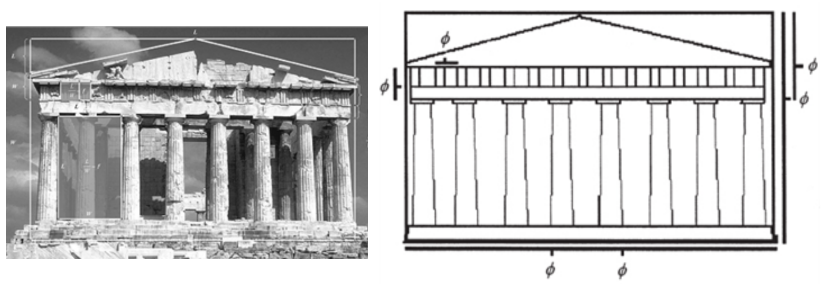
Prvi zapis vezan za zlatni rez pojavljuje se u jednoj od najvažnijih matematičkih knjiga, Euklidovim *Elementima. Elementi* su pisani u 3. stoljeću prije Krista i u njima su usustavljena dotadašnja dostignuća u matematici. Elementi se sastoje od 13 knjiga, a na dva mjesta se spominje zlatni rez: u knjizi 2, propozicija 11., konstruira se dužina (slika 1.2), koje je presječena tako da pravokutnik ima duljine stranica jednake duljini cijele te dužine i njenog jednog dijela čija je duljina takva da je nad njom kvadrat.



Slika 1.2: Euklidova definicija zlatnog reza

Prema toj propoziciji definicija zlatnog reza je sljedeća:
„Danu dužinu podijeliti tako da pravokutnik obuhvaćen cijelom dužinom i jednim odsječkom, bude jednak kvadratu na drugom odsječku.“
U ovom slučaju Euklid upućuje na to da je dužina $\overline{AB}$ podijeljena u omjeru zlatnog reza točkom C te da vrijedi $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|AC|}{|CB|}$, a to je upravo sama definicija zlatnog reza.

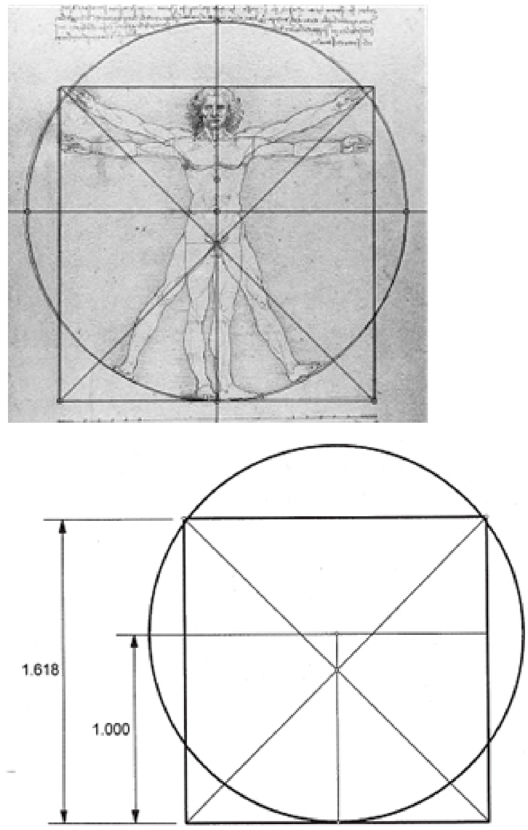
Sljedeća pojava zlatnog reza je kod grčkog kipara Fidije (Phidias). Njegova konstrukcije Partenona u Ateni i skulptura koje krase Partenon, kao što je Zeusov kip, također odražava zlatni rez. Brojni matematičari za oznaku zlatnog reza koriste grčko slovo ϕ koje je upravo prvo slovo Fidijevog imena na grčkom, $\phi\varepsilon\iota\delta\iota\alpha\varsigma$



Slika 1.3: Partenon

Na slici 1.3 možemo vidjeti kako se Partenon uklapa u zlatni pravokutnik. Također, možemo uočiti broj pojavljivanja zlatnog reza. Još dan danas, nitko ne može sa sigurnošću reći da je Fidije baš na umu imao zlatni rez dok je konstruirao Partenon.

Ako nastavimo dalje pratiti povijesni trag zlatnog reza, pronaći ćemo zlatni rez u knjizi *De Divina Proportione* (The Divine Proportion), napisanoj 1509. godine. Njen autor je francuski fratar i matematičar Fra Luca Pacioli (cca 1445.-1514. ili 1517.). Knjiga sadrži crteže pet Platonovih tijela, talijanskog slikara, kipara i arhitekta te također matematičara Leonarda da Vincia (1452.-1519.).



Slika 1.4: Vitruvijev čovjek

Da Vinci je također nacrtao i Vitruvijevog čovjeka (Vitruvian Man) oko 1487. godine. To je slika muškog tijela, koja je primjer dobre aproksimacije broja ϕ. Zlatni rez se pojavljuje u činjenici da je udaljenost od pupka do vrha glave podijeljena s udaljenošću od stopala do pupka (pupak je upravo središte kruga) jednake 0.656.
Kada bi gornji vrhovi kvadrata bili bliže kružnici tada bi vrijednost spomenutog omjere bila još bliža vrijednosti zlatnog reza. To se može vidjeti na drugoj slici (slika 1.4), gdje je radijus kruga 1, a stranice kvadrata su duljine 1.618, približno jednako broju ϕ.

Postoji još mnogo primjera u umjetnosti i arhitekturi u kojima se pojavljuje zlatni rez, no i danas se za većinu njih ne može reći da su umjetnici, arhitekti baš željeli napraviti svoja djela u omjeru zlatnog reza jer ne postoje nikakvi dokazi. Neke od takvih primjere vidjet ćemo u posljednjem poglavlju.

2 Definicija i numerička vrijednost

Za dužinu koja je podijeljena na dva dijela tako da se dulji dio dužine (a) odnosi prema kraćem (b) kao cijela duljina dužine ($a + b$) prema duljem dijelu (a), kažemo da je podijeljena u omjeru zlatnog reza. Simbolički,

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Slika 2.5: Definicija zlatnog reza

Ovaj omjer ima vrlo specifičnu numeričku vrijednost. Da bi mogli odrediti numeričku vrijednost riješimo jednadžbu koju dobijemo, upravo iz prethodno navedenog omjera, $a^2 = ab + b^2$. Jednadžbu možemo zapisati i kao $a^2 - ab - b^2 = 0$ te je riješiti ili po a ili po b. Imamo

$$a_1 = \frac{b(1+\sqrt{5})}{2}, \quad a_2 = \frac{b(1-\sqrt{5})}{2}.$$

Kako duljina ne može biti negativna, zanemarit ćemo negativno rješenje. Dakle,

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

što je upravo vrijednost zlatnog reza, ϕ. Pogledajmo i recipročnu vrijednost od ϕ, $\frac{1}{\phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$ te pomnožimo li to sa $\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$ dobivamo

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\phi}$$

Aproksimativne vrijednost broja ϕ (slika 2.6)i njegove recipročne vrijednosti (slika 2.7) vidljivi su na navedenim slikama.

≈1.61803398874989484820458683436563811772030917980576286621
354486227052604628189024497072072041893911374847540880753
868917521266338622235369317931800607667263544333890865959
3958290563832266131992829026788067520876689250171169620703
2221043216269548626296313614438149758701220340805887954454
749246185695364864449241044320771344947049565846788509874
3394422125448770664780915884607499887124007652170575179788
34166256249407589069704000281210427621771117778053153171410
11704666599146697987317613560067087480710131795236894275219
484353056783002287856997829778347845878228911097625003026
9615617002504643382437764861028383126833037242926752631165
33924731671112115881863851331620384005222165791286675294654
90681131715993432359734949850904094762132229810172610705961
164562990981629055520852479035240602017279974717534277759
27786256194320827505131218156285512224809394712341451702237
358057727861600868838295230459264787801788992199027077690
38953219681986151437803149974110692608867429622675756052317

Slika 2.6: Aproksimativna vrijednost broja ϕ

≈.61803398874989484820458683436563811772030917980576286213
544862270526046281890244970720720418939113748475408807538
689175212663386222353693179318006076672635443338908659593
9582905638322661319928290267880675208766892501711696207032
2210432162695486262963136144381497587012203408058879544547
492461856953648644492410443207713449470495658467885098743
3944221254487706647809158846074998871240076521705751797883
416625624940758906970400028121042762177111777805315317141011
7046665991466979873176135600670874807101317952368942752194
843530567830022878569978297783478458782289110976250030269
6156170025046433824377648610283831268330372429267526311653
39247316711121158818638513316203840052221657912866752946549
06811317159934323597349498509040947621322298101726107059611
645629909816290555208524790352406020172799747175342777592
77862561943208275051312181562855122248093947123414517022373
580577278616008688382952304592647878017889921990270776903
89532196819861514378031499741106926088674296226757560523172

Slika 2.7: Aproksimativna vrijednost $1/\phi$

Uočavamo da vrijednost broja ϕ ima jedinstvenu karakteristiku. Osim činjenice da je produkt broja sa svojom recipročnom vrijednošću jednaka 1, imamo i da je razlika broja ϕ i njegove recipročne vrijednosti jednak 1, odnosno $\phi - \dfrac{1}{\phi} = 1$. Upravo je ϕ jedini broj za kojeg vrijedi to svojstvo.

Prvi matematičar koji je izračunao vrijednost broja ϕ na pet decimala je Michael Maestlin (1550.-1631.), a bio je jedan od Keplerovih učitelja. U sljedećoj tablici navedeni su podaci o računanju vrijednosti broja ϕ kroz povijest.

Godina	Broj decimalnih mjesta	Matematičar
1966.	4 599	*M.Berg*
1976.	10 000	J. Shallit
1996.	10 000 000	G. J. Fee i S. Plouffe
2000.	1 500 000 000	X. Gourdon i P. Sebah
2007.	5 000 000 000	A. Irlande
2008.	17 000 000 000	A. Irlande
2008.	31 415 957 000	X. Gourdon i P. Sebah
2008.	100 000 000 000	S. Kondo i S.Pagliarulo
2010.	1 000 000 000 000	A. Yee

Navedimo neka svojstva ovog broja. Što možemo reći o potencijama broja ϕ? Kako bi to mogli bolje razmotriti prvo ćemo odrediti vrijednost broja ϕ u terminima samog ϕ.

$$\phi^2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \frac{5+2\sqrt{5}+1}{4} = \frac{2\sqrt{5}+6}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1 = \phi + 1.$$

Dakle imamo $\phi^2 = \phi + 1$. Iz ove jednadžbe možemo generirati zanimljive matematičke izraze kojima bi pokazali vrijednost broja ϕ. Ako korjenujemo obje strane imamo $\phi = \sqrt{1+\phi}$. Ako zamijenimo ϕ ispod korijena sa ekvivalentnom vrijednošću koju smo prethodno dobili imamo

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\phi}}$$

Ponavljanjem tog postupka dolazimo do izraza

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+....}}}}}}}}$$

Promotrimo sada izraz

$$x = \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-....}}}}}}}}$$

Do vrijednost od x možemo doći na sljedeći način:
Imamo beskonačan broj korijena u tom izrazu. Bez gubitka točnosti, možemo privremeno zanemariti najudaljeniji korijen i vidjeti da je preostali izraz zapravo isti kao izvorni. Stoga, ako zamijenim tu vrijednost od varijable x s originalnim izrazom imamo $x = \sqrt{1-x}$. Kada kvadriramo taj izraz dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2 = 1 - x$, odnosno $x^2 + x - 1 = 0$. Rješenje te jednadžbe (ignorirajući negativno rješenje) je $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.61803$, što je zapravo $\dfrac{1}{\phi}$. Ponovo smo dobili jednu zanimljivu vezu

između ϕ i $\dfrac{1}{\phi}$:

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}}}}}$$

$$\frac{1}{\phi} = \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-....}}}}}}}}$$

Sada možemo pogledati što se događa sa potencijama broja ϕ. Kako bi lakše uočili neke činjenice rastavit ćemo potencije broja ϕ na komponente, na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\phi &= \phi \\
\phi^2 &= \phi + 1 \\
\phi^3 &= \phi \cdot \phi^2 = \phi(\phi+1) = \phi^2 + \phi = (\phi+1) + \phi = 2\phi + 1 \\
\phi^4 &= \phi^2\phi^2 = (\phi+1)(\phi+1) = \phi^2 + 2\phi + 1 = (\phi+1) + 2\phi + 1 = 3\phi + 2 \\
\phi^5 &= \phi^3\phi^2 = (2\phi+1)(\phi+1) = 2\phi^2 + 3\phi + 1 = 2(\phi+1) + 3\phi + 1 = 5\phi + 3 \\
\phi^6 &= \phi^3\phi^3 = (2\phi+1)(2\phi+1) = 4\phi^2 + 4\phi + 1 = 4(\phi+1) + 4\phi + 1 = 8\phi + 5 \\
\phi^7 &= \phi^4\phi^3 = (3\phi+2)(2\phi+1) = 6\phi^2 + 7\phi + 2 = 6(\phi+1) + 7\phi + 2 = 13\phi + 8 \\
\phi^8 &= \phi^4\phi^4 = (3\phi+2)(3\phi+2) = 9\phi^2 + 12\phi + 4 = 9(\phi+1) + 12\phi + 4 = 21\phi + 13 \\
\phi^9 &= \phi^5\phi^4 = (5\phi+3)(3\phi+2) = 15\phi^2 + 19\phi + 6 = 15(\phi+1) + 19\phi + 6 = 34\phi + 21 \\
\phi^{10} &= \phi^5\phi^5 = (5\phi+3)(5\phi+3) = 25\phi^2 + 30\phi + 9 = 25(\phi+1) + 30\phi + 9 = 55\phi + 34 \\
&...
\end{aligned}$$

Već iz izraza za prvih deset potencija možemo uočiti pravilnost. Ako nastavimo dalje potencirati broj ϕ, zapis svake potencije broja ϕ je zapravo jednak višekratniku broja ϕ zbrojenog s nekom konstantom. Također, daljnjim potenciranjem uočavamo da koeficijenti koji se dobiju uz ϕ i konstante prate sljedeći uzorak: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89$, $144\ldots$ Ovaj niz brojeva je jako dobro poznat, a to je upravo Fibonaccijev niz brojeva. Dakle potencije broja ϕ bi općenito mogli napisati kao

$$\phi^n = F_n\phi + F_{n-1}.$$

Može se pokazati da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

No, ako gledamo i negativne potencije detaljnijim razmatranjem, došli bi do sljedećeg zaključka:

$$\phi^n + (-1)^n\phi^{-n} = L_n$$

gdje je L_n n-ti Lucasov broj. Lucasov niz brojeva je sljedeći: $1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots$. Niz Lucasovih brojeva je rekurzivno definiran sa

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N},$$
$$L_0 = 2, L_1 = 1.$$

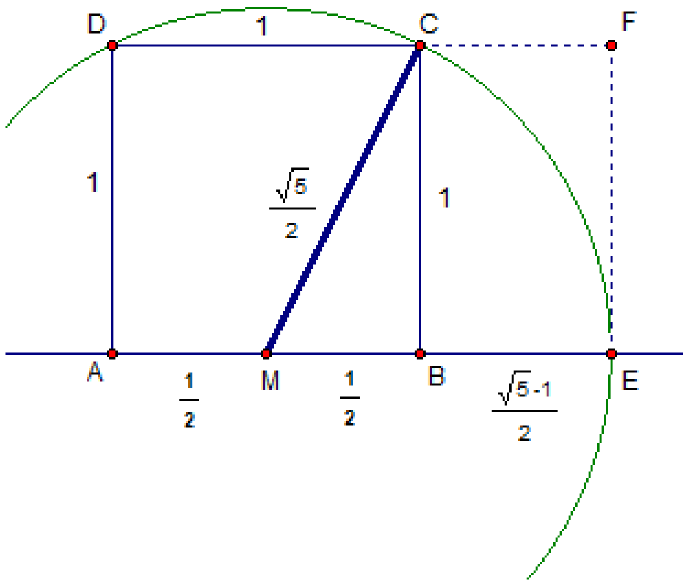
Vidimo da Fibonaccijev i Lucasov niz imaju istu rekurzivnu relaciju, ali se razlikuju u početnim uvjetima.

3 Konstrukcije zlatnog reza

Zlatni rez se može i geometrijski konstruirati i to na više različitih načina. U ovom poglavlju navest ćemo deset načina konstrukcija zlatnog reza. Biti će prikazana i jedna od najstarijih konstrukcija, Euklidova konstrukcija, zatim različite konstrukcije ravnalom i šestarom te jedna konstrukcija korištenjem samo šestara. Prvo ćemo objasniti najjednostavniju i najpopularniju konstrukciju zlatnog reza.

Konstrukcija 1.

Ova konstrukcija počinje od jediničnog kvadrata $ABCD$ kao na slici 3.8. Neka je M polovište stranice $\overline{AB}$.



Slika 3.8

Konstruirajmo kružni luk radijusa $|MC|$ (središte M) te njegov presjek s pravcem AB označimo sa E. U ovom slučaju dužina $\overline{AE}$ podijeljena je točkom B u omjeru zlatnog reza. Dokažimo to.

Treba dokazati: $\dfrac{|AB|}{|BE|} = \dfrac{|AE|}{|AB|}$. Primjenom Pitagorinog teorema na ΔMBC imamo

$$|MC|^2 = |MB|^2 + |BC|^2 = (\frac{1}{2})^2 + 1^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}, \ |MC| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Nadalje imamo

$$|BE| = |ME| - |MB| = |MC| - |MB| = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$
$$|AE| = |AB| + |BE| = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Sada možemo dokazati jednakost omjera $\dfrac{|AB|}{|BE|} = \dfrac{|AE|}{|AB|}$

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{1},$$

što je istina jer $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = 1 \cdot 1 = 1.$

Dakle, točka B dijeli segment $\overline{AE}$ u tzv. „unutarnjem“ zlatnom rezu

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Isto tako, može se reći da točka E dijeli segment $\overline{AB}$ u tzv. „vanjskom“ zlatnom rezu

$$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

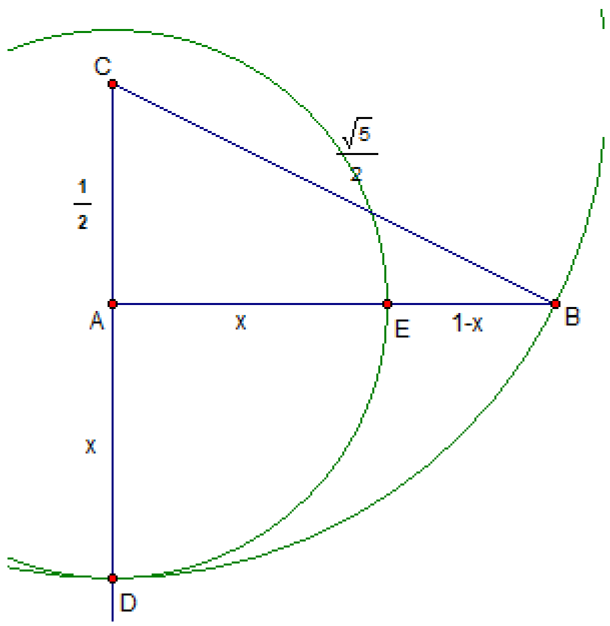
Ako promotrimo pravokutnik $AEFD$ možemo uočiti da je omjer duljina njegovih stranica:

$$\frac{|AE|}{|EF|} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi.$$

Takav pravokutnik se naziva zlatni pravokutnik. O zlatnom pravokutniku ćemo reći nešto više kasnije.

Konstrukcija 2.

Sljedeća konstrukcija je Euklidova konstrukcija zlatnog reza koja je varijacija prve konstrukcije.



Slika 3.9

Euklid koristi pravokutni trokut ABC s duljinama kateta 1 i $\frac{1}{2}$ kao na slici 3.9. Konstruiran je kružni luk s središtem u točki C i radijusom $|BC|$ te je dužina $\overline{AC}$ produžena preko vrha A do točke D. Neka je točka E presjek kružnog luka, s centrom u A i radijusom$|AD|$, i pravca AB.

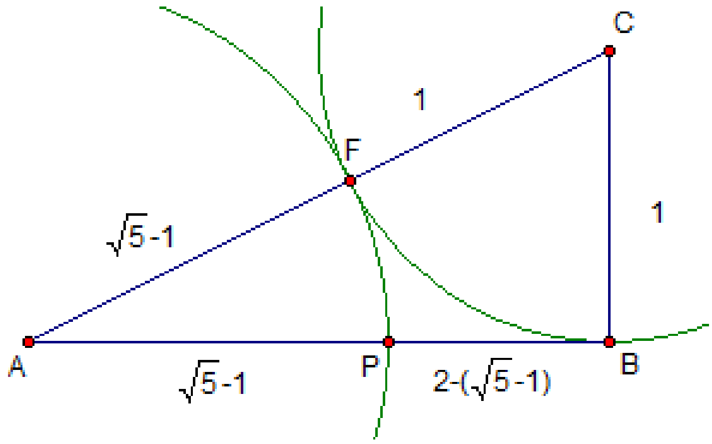
Primjenom Pitagorinog teorema jasno je da je $|BC| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ te označimo $|AD| = x$. Imamo:

$$x = |AE| = |AD| = |CD| - |AC| = |BC| - |AC| = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$
$$|BE| = |AB| - |AE| = 1 - x = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$
$$\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi.$$

Upravo smo dobili da točka E dijeli $\overline{AB}$ u omjeru zlatnog reza te time dokazali ispravnost konstrukcije.

Konstrukcija 3.

I kod ove konstrukcije koristimo pravokutan trokut čije su duljine kateta u omjeru 2:1. U ovom slučaju podijelit ćemo dužinu $\overline{AB}$ u omjeru zlatnog reza.



Slika 3.10

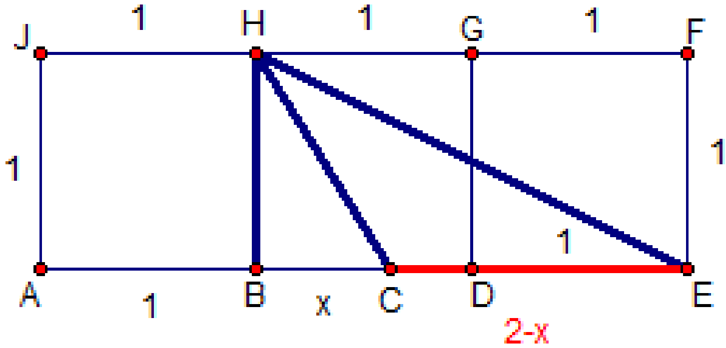
Prvo konstruiramo pravokutan trokut ABC tako da vrijedi $|AB| = 2$ i $|BC| = 1$, (slika 3.10). Primjenom Pitagorinog teorema na ΔABC dobivamo $|AC| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$. . Konstruiramo kružnicu sa središtem u točki C i radijusom 1. Sjecište $\overline{AC}$ s kružnicom označimo s F. Sada konstruiramo kružnicu sa središtem u A i radijusom $|AF|$, a presjek kružnice s $\overline{AB}$ označimo s P. Kako je $|AF| = \sqrt{5}-1$, to je $|AP| = \sqrt{5}-1$. Nadalje, $|BP| = 2 - (\sqrt{5}-1) = 3 - \sqrt{5}$. Odredimo omjer $\frac{|AP|}{|BP|}$

$$\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi.$$

Dokazali smo da točka P dijeli segment $\overline{AB}$ u omjeru zlatnog reza.

Konstrukcija 4.

Sljedeća konstrukcija je konstrukcija pomoću tri jedinična kvadrata. Opet nam je cilj konstruirati točku koja dužinu dijeli u omjeru zlatnog reza.



Slika 3.11

Prvo krenemo od toga da imamo tri jedinična kvadrata, $ABHJ$, $BDGH$, $DEFG$, kao na slici 3.11. U ovoj konstrukciji koristimo teorem o simetrali unutarnjeg kuta trokuta: *Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli tom trokutu nasuprotnu stranicu u omjeru duljina preostalih stranica.*

Jer je HC simetrala kuta BHE dobivamo $\frac{|BH|}{|EH|} = \frac{|BC|}{|CE|}$. Primjenom Pitagorinog teorema na ΔHFE dobivamo $|HE| = \sqrt{5}$. Sada imamo $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{x}{2-x}$, odakle slijedi

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{\phi}.$$

Prema tome, možemo zaključiti da točka B dijeli segment $\overline{AC}$ u omjeru zlatnog reza,

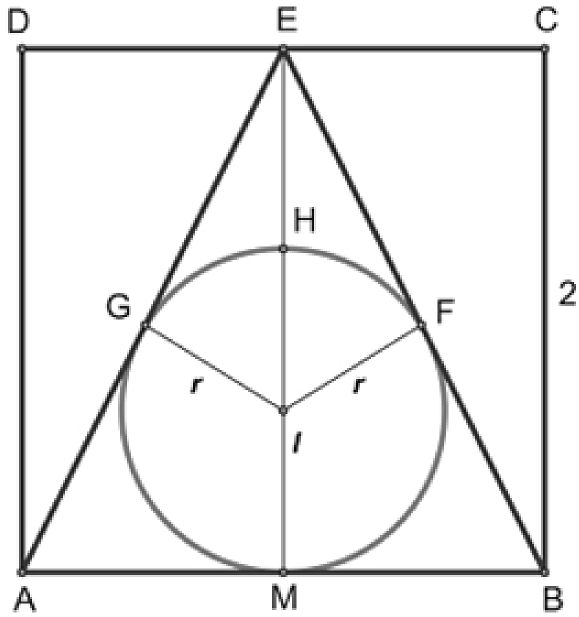
$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Konstrukcija 5.

Ovo je jednostavna konstrukcija zlatnog reza koja zahtjeva konstrukciju jednakokračnog trokuta unutar kvadrata.

Neka vrh E, trokuta ABE, leži na stranici CD kvadrata $ABCD$ i neka visina EM siječe upisanu kružnicu tom trokutu u točki H (slika 3.12). Zlatni omjer ovdje se pojavljuje na dva načina. Prvo, ako je stranica kvadrata duljine dva, onda je radijus upisane kružnice $r = \frac{1}{\phi}$, a drugo je što točka H dijeli dužinu $\overline{EM}$ u omjeru zlatnog reza, $\frac{|EM|}{|HM|} = \phi$.

Neka je dan kvadrat duljine stranice 2. Trokut ABE je jednakokračan trokut duljine osnovice 2 i visine 2. Nađimo radijus tom trokutu upisane kružnice prema formuli za radijus upisane kružnice trokuta $r = \frac{2P}{o}$ gdje je P površina trokuta, a o opseg trokuta. Primjenom Pitagorinog teorema na trokut MBE dobivamo $|BE| = |AE| = \sqrt{5}$ pa je

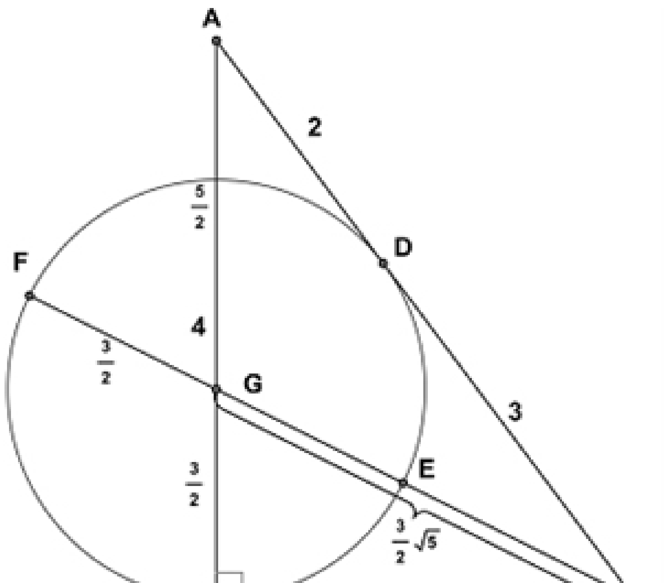


Slika 3.12

opseg trokuta ABE $2+2\sqrt{5}$. Kako površina trokuta ABE iznosi 4 za radijus upisane kružnice trokuta dobivamo $\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$, odnosno $r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \dfrac{1}{\phi}$. Sada lako dobivamo $\dfrac{|EM|}{|HM|} = \dfrac{2}{2r} = \dfrac{1}{r} = \phi$.

Konstrukcija 6.

Navest ćemo sada jednu konstrukciju zlatnog reza, korištenjem kružnice i pravokutnog trokuta.



Slika 3.13

Na slici 3.13 imamo pravokutni trokut ΔABC s katetama duljine 3 i 4. Simetrala $\angle ABC$ siječe stranicu AC u točki G. Točka G je središte kružnice radijusa $|GC|$. BC i AB su tangente te kružnice. Kako simetrala kuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostale dvije imamo

$$\frac{|AG|}{|GC|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{5}{3}, \ |AG| = \frac{5}{3}|GC|.$$

Kako je $|AG| + |GC| = 4$ imamo $\frac{5}{3}|GC| + |GC| = \frac{8}{3}|GC| = 4$, odnosno $|GC| = \frac{3}{2}$ pa je $|AG| = \frac{5}{2}$.

$|GC| = |GD| = |GE| = |GF|$ su radijusi kružnice pa imamo $|FG| = \frac{3}{2}$ i $|GE| = \frac{3}{2}$. Primjenjujući Pitagorin teorem na ΔGBC imamo

$$|GB|^2 = |BC|^2 + |GC|^2 = 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4}, |GB| = \frac{3}{2}\sqrt{5}.$$

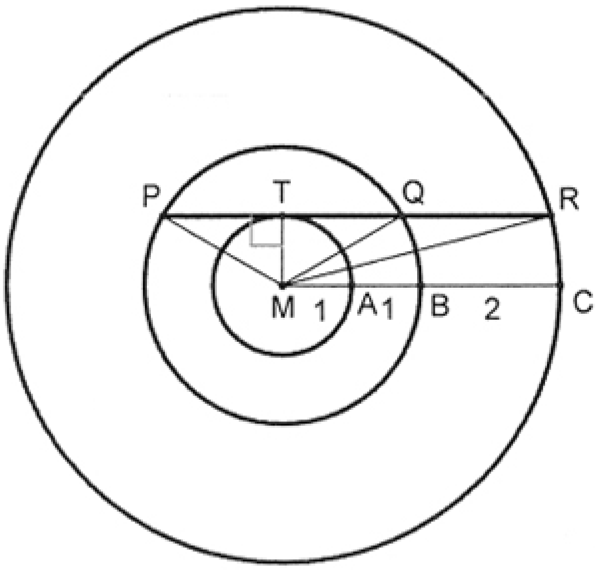
Sada možemo pokazati da točka E dijeli dužinu $\overline{BF}$ u omjeru zlatnog reza:

$$\frac{|BF|}{|FE|} = \frac{|GF| + |GB|}{|GF| + |GE|} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}}{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Sličnu konstrukciju s pravokutnim trokutom otkrio je Gabries Bosia razmišljajući o mogućim potezima skakača u šahu.

Konstukcija 7.

Navedimo sada konstrukciju pomoću tri koncentrične kružnice radijusa 1, 2 i 4.



Slika 3.14

Neka je PR tangenta najmanje kružnice u točki T takva da siječe preostale dvije kružnice u točkama P, Q i R (slika 3.14). Uz $|AM| = |AB| = 1$ i $|BC| = 2$ primjenom

Pitagorinog teorema na ΔMQT i ΔMRT imamo

$$|QT| = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$
$$|RT| = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}.$$

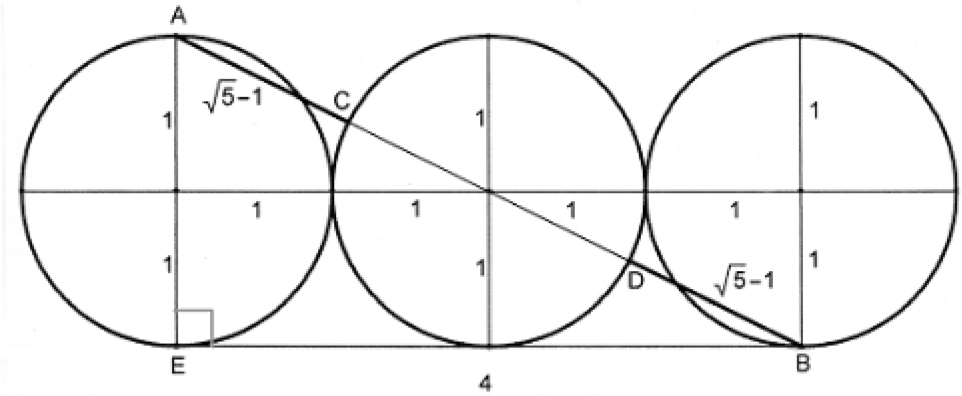
Sada možemo pogledati duljine dužina $\overline{PR}$ i $\overline{PQ}$ te njihov omjer:

$$|PR| = |RT| + |PT| = |RT| + |QT| = \sqrt{15} + \sqrt{3} = \sqrt{3}(\sqrt{5} + 1)$$
$$|PQ| = |PT| + |QT| = 2\sqrt{3}$$
$$\frac{|PR|}{|PQ|} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Ovime smo pokazali da točka Q dijeli $\overline{PR}$ u omjeru zlatnog reza.

Konstrukcija 8.

U ovoj konstrukciji imat ćemo tri kružnice radijusa $r = 1$ koje se dodiruju izvana kao na slici 3.15.



Slika 3.15

Iz slike je vidljivo da je $|AE| = 2$ i $|BE| = 4$. Primjenom Pitagorinog teorema na ΔABE imamo $|AB| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$. Zbog simetričnosti vrijedi $|AC| = |BD|$ i zbog $|CD| = 2$ imamo

$$|AB| = |AC| + |CD| + |BD| = 2|AC| + 2 = 2\sqrt{5}$$

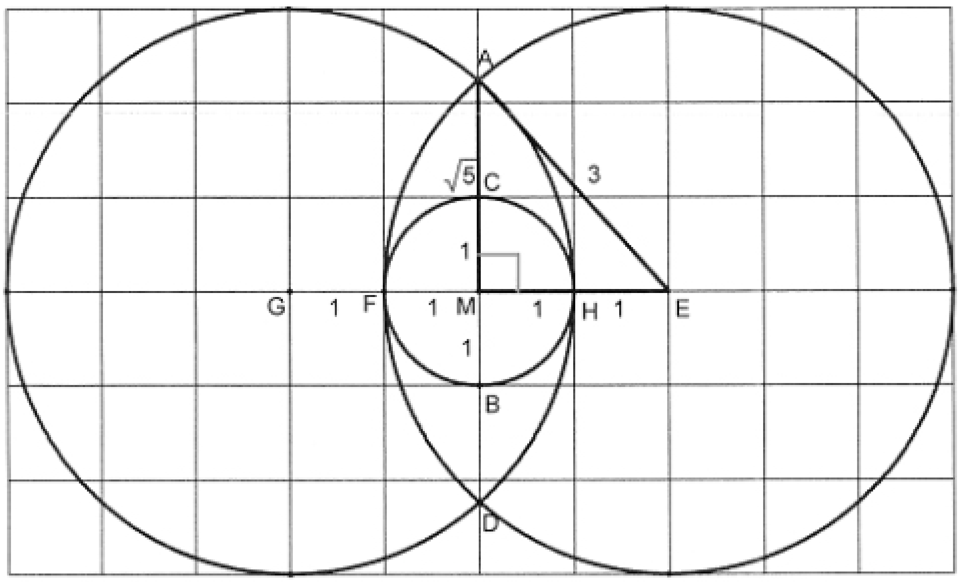
iz čega slijedi $|AC| = \sqrt{5} - 1$ te

$$|AD| = |AB| - |BD| = |AB| - |AC| = 2\sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1) = \sqrt{5} + 1.$$

Omjer $\dfrac{|AD|}{|CD|} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ nam daje vrijednost zlatnog reza, odnosno konstruirali smo točku koja dužinu dijeli u omjeru zlatnog reza.

Konstrukcija 9.

Sljedeću konstrukciju zlatnog reza popularizirao je Hans Walser koji je tri kružnice smjestio u koordinatni sustav na način prikazan na slici 3.16.



Slika 3.16

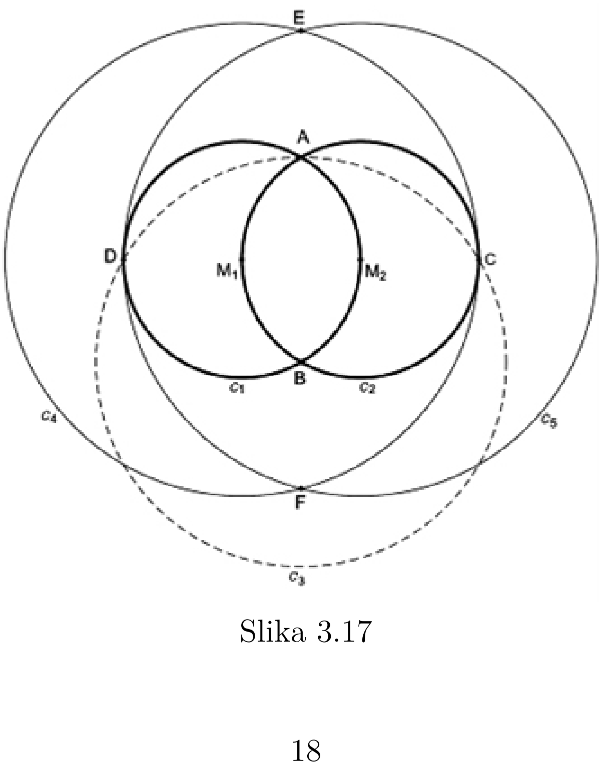
Kružnica radijusa 1 je smještena u dvije kružnice radijusa 3. Uz $|AE| = |EF| = |GH| = 3$ i $|BC| = 2$ primjenom Pitagorinog teorema na ΔAEM imamo da je $|AM| = \sqrt{5}$. Nadalje, $|AB| = |AM| + |BM| = \sqrt{5}+1$, pa možemo pogledati omjer $|AB| : |BC|$ i on je upravo jednak broju ϕ.

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi.$$

Također pogledamo li i $|BC| : |AC|$ opet imamo ϕ,

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|BC|}{|AM| - |CM|} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi.$$

Konstrukcija 10.



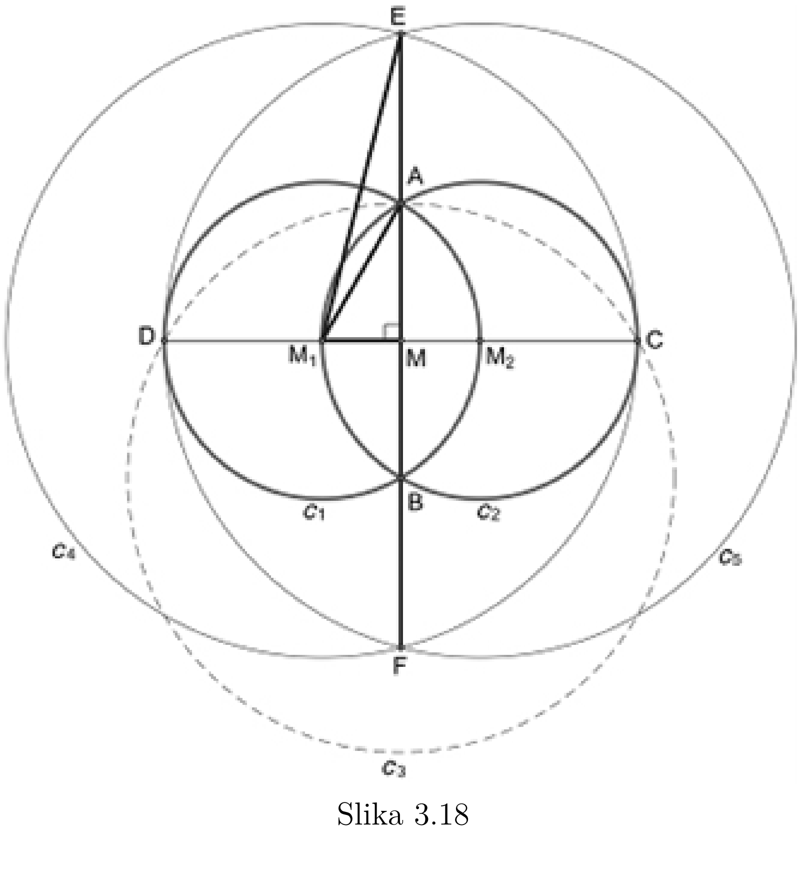
Slika 3.17

Navest ćemo još jednu konstrukciju zlatnog reza. Specifičnost ove konstrukcije je što je skup instrumenata restringiran na korištenje samo šestara.

Konstrukcija počinje konstruiranjem kružnice k_1 sa središtem M_1 i radijusom $r_1 = r$ (slika 3.17). Zatim se proizvoljno bira točka M_2 na kružnici k_1 i konstruira kružnica k_2 sa središtem u M_2 i radijusom $r_2 = r$. Slijedi $|M_1M_2| = r$. Sjecišta kružnica k_1 i k_2 označimo sa A i B te konstruiramo kružnicu k_3 sa središtem u B i radijusom $|AB| = r_3$ koja siječe kružnice k_1 i k_2 u točkama C i D. Uočimo da su točke D, M_1, M_2 i C kolinerane. Sada konstruiramo kružnicu k_4 sa središtem u M_1 i radijusom $|M_1C| = r_4 = 2r$ te na kraju kružnicu k_5 sa središtem M_2 i radijusom $|M_2D| = r_5 = r_4 = 2r$ i ona siječe kružnicu k_4 u točkama E i F.

Zbog simetričnosti, očito je $|AE| = |BF|$, $|AF| = |BE|$, $|AM| = |BM|$, $|EM| = |FM|$ i $|CM| = |DM|$, $|MM_1| = |MM_2|$. Dokažimo da vrijedi

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|BE|}{|AB|} = \phi, \frac{|AB|}{|BF|} = \frac{|AF|}{|AB|} = \phi.$$



Slika 3.18

Radijus prve kružnice k_1 je $r_1 = r = |AM_1|$, a radijus kružnice k_4 je $r_4 = 2r = |CM_1| = |EM_1|$. Primjenom Pitagorinog teorema na ΔAMM_1 imamo $|AM_1|^2 = |AM|^2 + |MM_1|^2$, odnosno $r^2 = |AM|^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2$, iz čega nam slijedi da je $|AM| = \left(\frac{r}{2}\right)\sqrt{3}$. Zatim primjenom Pitagorinog teorema na ΔEMM_1 imamo $|EM_1|^2 (= |CM_1|^2) = |EM|^2 + |MM_1|^2$ tj. $(2r)^2 = |EM|^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2$, iz čega nam slijedi $|EM| = \left(\frac{r}{2}\right)\sqrt{15}$. Odavde dobivamo

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AM|+|BM|}{|EM|-|AM|} = \frac{2|AM|}{|EM|-|AM|} = \frac{2\cdot\frac{r}{2}\sqrt{3}}{\frac{r}{2}\sqrt{15}-\frac{r}{2}\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi.$$

Pogledajmo sada omjer $\frac{|BE|}{|AB|}$.

$$\frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|EM|+|BM|}{|AM|+|BM|} = \frac{|EM|+|AM|}{2|AM|} = \frac{\frac{r}{2}\sqrt{15}+\frac{r}{2}\sqrt{3}}{2\cdot\frac{r}{2}\sqrt{3}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$$

U oba slučaja smo dobili ϕ te smo time dokazali prvu tvrdnju. Na analogan način se pokaže i druga, odnosno da je $\frac{|AB|}{|BF|} = \frac{|AF|}{|AB|} = \phi$

4 Zlatna planimetrija i stereometrija

Termin zlatni pojavljuje se u različitim dimenzijama. Tako u dvije dimenzije imamo zlatni pravokutnik, zlatni trokut, zlatni kut, zlatni peterokut, a u tri dimenzije najčešće ćemo termin zlatni naći kod Platonovih tijela.
U ovom poglavlju upoznat ćemo još neke geometrijske figure koje nose epitet „zlatni“.

4.1 Zlatni pravokutnik

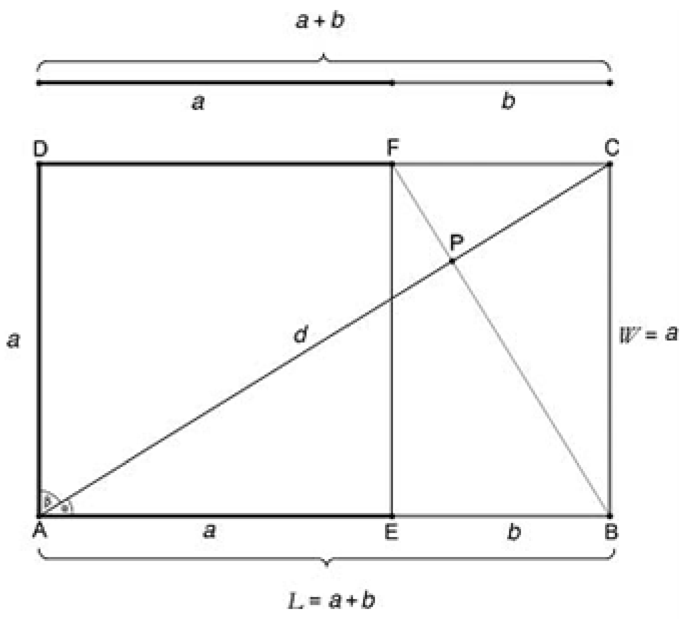
Zlatni pravokutnik je jedan od najpoznatijih „zlatnih likova“. Smatra se da je oblik tog pravokutnika oku najugodniji, a spominje se još u helenističkom dobu. Zlatni pravokutnik je pravokutnik za koji je omjer duljina stranica jednak zlatnom rezu.

Prvo uvedimo oznake za duljine stranica pravokutnika. Neka je L njegova duljina, a W njegova širina. Ako smo uveli takve oznake onda bi imali sljedeći oblik zlatnog omjera

$$\frac{L}{W} = \frac{W+L}{L} = \phi.$$

Kako bi mogli lakše iskazati i dokazati neke činjenice vezane uz zlatni pravokutnik, neka imamo pravokutnik $ABCD$ kojemu je duljina $L = a+b$, a širina $W = a$ pa ćemo imati sljedeći omjer $\frac{L}{W} = \frac{a+b}{a} = \phi$ iz čega nam slijedi da je $\frac{a}{b} = \phi$.

Pogledajmo sljedeću sliku pravokutnika s oznakama koje smo prethodno uveli.



Slika 4.19

Ako izrežemo kvadrat $AEFD$ iz zlatnog pravokutnika $ABCD$, ostanem nam pravokutnik $EBCF$, koji je također zlatni pravokutnik zbog toga što su duljine njegovih stranica u sljedećem omjeru $\frac{L}{W} = \frac{a}{b} = \phi$. Točka E se može nazvati zlatna točka dužine $\overline{AB}$ jer je $\frac{|AE|}{|EB|} = \phi$. Pomoću Pitagorinog teorema, gledajući ΔACD, možemo odrediti duljinu dijagonale $\overline{AC}$ zlatnog pravokutnika $ABCD$:

$$d^2 = (a+b)^2 + a^2 = 2a^2 + 2ab + b^2$$

$$\frac{d^2}{a^2} = 2 + 2 \cdot \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} = 2 + 2 \cdot \frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = 2 + 2(\phi - 1) + (\phi - 1)^2 = \phi^2 + 1$$

$$\frac{d^2}{(a+b)^2} = \frac{(a+b)^2 + a^2}{(a+b)^2} = 1 + \frac{a^2}{(a+b)^2} = 1 + \frac{1}{\phi^2}$$

Pogledajmo u kakvom su odnosu duljina dijagonale i stranice pravokutnika:

$$\frac{d}{a} = \sqrt{\phi^2 + 1},$$

$$\frac{d}{a+b} = \sqrt{1 + \frac{1}{\phi^2}} = \sqrt{\phi^2 + 1} \cdot \frac{1}{\phi} \left(= \frac{d}{a} \cdot \frac{1}{\phi} \right) = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}.$$

Iz toga nam slijedi da je omjer duljine dijagonale, duljine i širine zlatnog pravokutnika sljedeći

$$d : (a+b) : a = \sqrt{\phi^2 + 1} : \phi : 1.$$

Već sad je vidljivo da se broj ϕ pojavljuje u različitim kombinacijama kod zlatnog pravokutnika.

Pogledajmo što je s površinom. Ako pogledamo omjer površina zlatnog pravokutnika $ABCD$ i kvadrata $AEFD$ kojemu je duljina stranice a dobivamo

$$\frac{P_{ABCD}}{P_{AEFD}} = \frac{a(a+b)}{a^2} = \frac{a+b}{a} = \phi.$$

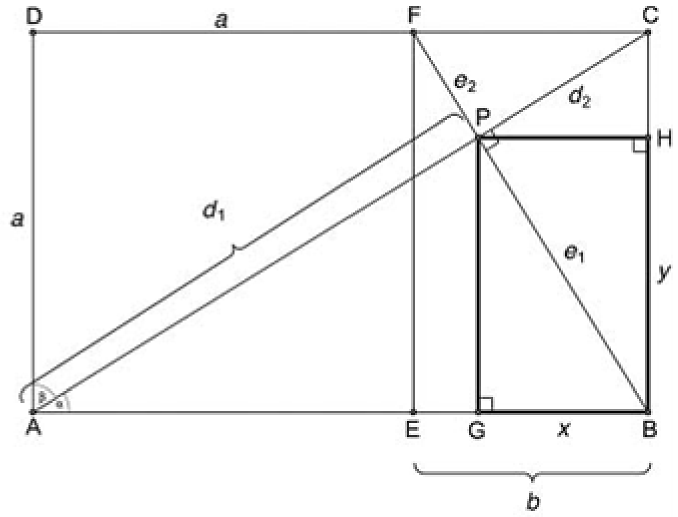
Možemo usporediti i površine kvadrata $AEFD$ i zlatnog pravokutnika $EBCF$:

$$\frac{P_{AEFD}}{P_{EBCF}} = \frac{a^2}{ab} = \frac{a}{b} = \phi.$$

U oba slučaja kao rezultat imamo broj ϕ.

Neka je sjecište pravaca AC i BF točka P. Svi zlatni pravokutnici imaju isti oblik pa možemo zaključiti da je zlatni pravokutnik $ABCD$ sličan zlatnom pravokutniku $EBCF$ iz čega nam onda slijedi sličnost ΔBCF i ΔABC, a onda iz toga sukladnost sljedećih kutova: $\angle CFB$ je sukladan $\angle BCA$ te je $\angle BCA$ komplementaran $\angle FCA$. Nadalje, $\angle CFB$ je komplementarn $\angle FCA$. Slijedi nam da onda $\angle FPC$ mora biti pravi kut, odnosno da su pravci AC i BF okomiti.

Ako je širina jednog pravokutnika jednaka duljini drugog pravokutnika i ti pravokutnici su slični, nazivamo ih recipročnim pravokutnicima. U tom slučaju omjer odgovarajućih stranica sličnih pravokutnika naziva se omjer sličnosti i odgovara broju ϕ. Također, može se pokazati da su kod racipročnih pravokutnika odgovarajuće dijagonale okomite, a što smo već pokazali za ova dva posebno recipročna pravokutnika - zlatna pravokutnika.

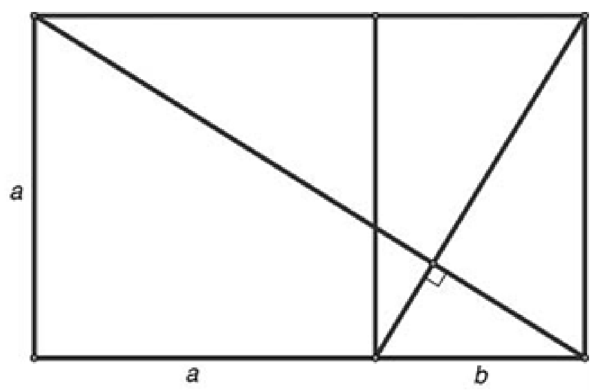


Slika 4.20

Na slici 4.20 vidimo da su pravokutnik $ABCD$ i pravokutnik $EBCF$ recipročni i da su odgovarajuće dijagonale okomite. Ako, na primjer, iz točke P spustimo okomicu na stranicu $\overline{AB}$, koristeći duljine naznačene na slici 4.20 te Pitagorin teorem i sličnost odgovarajućih trokuta dobit ćemo da je

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a} &= \frac{y}{x} = \frac{a-y}{b-x} = \phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \\ \frac{d_1}{d_2} &= \frac{e_1}{e_2} = \phi^2 = \phi + 1 = \frac{\sqrt{5}+3}{2}. \end{aligned}$$

Ovim zapravo vidimo da se dijagonale sijeku u omjeru koji opet uključuje zlatni omjer. Na sličan način može se doći do zaključaka za dijagonale $\overline{DE}$ i $\overline{BF}$.

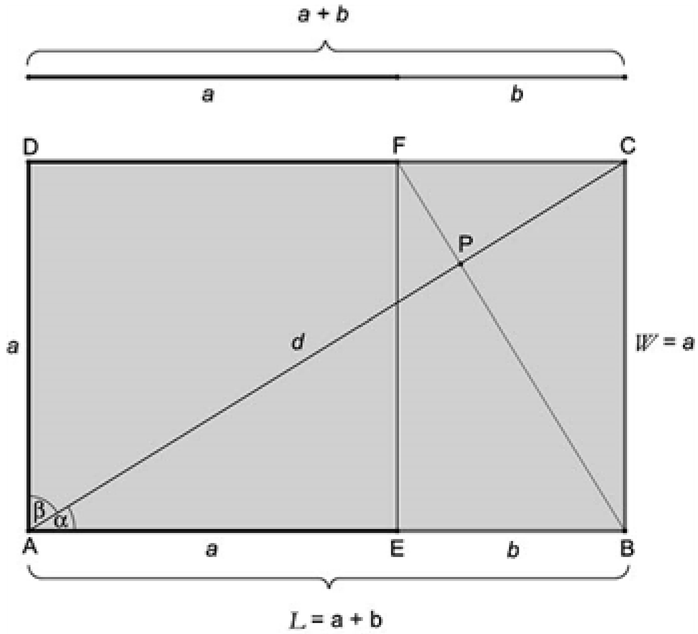


Slika 4.21

Promatrajući zlatni pravokutnik došli smo do zanimljivih omjera čija je vrijednost broj ϕ. No, već smo rekli da je zlatni pravokutnik jedan od najznačajnijih likova pa ćemo rezultate koje smo ovdje dobili spomenuti prilikom razmatranjem ostalih zlatnih likova i tijela.

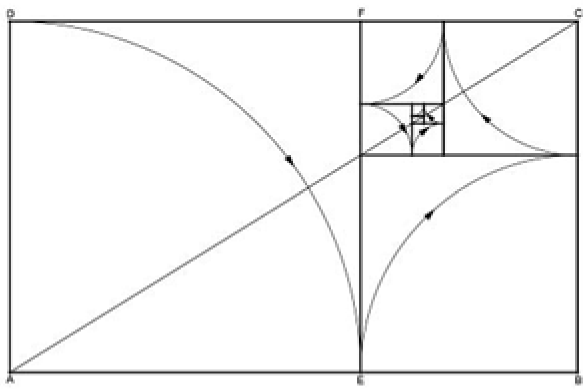
4.2 Zlatna spirala

Pogledajmo još jednom zlatni pravokutnik $ABCD$ sa stranicama duljine $a+b$ i a.



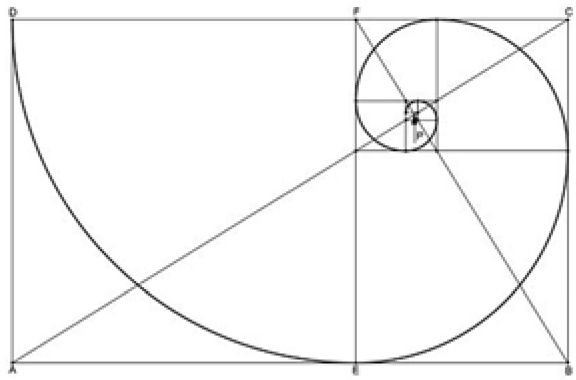
Slika 4.22

Ako izrežemo kvadrat $AEFD$ ostat će nam zlatni pravokutnik $EBCF$ sa stranicama duljine a i b. Već smo ranije pokazali da je $\frac{a+b}{a} = \phi$ kao i $\frac{a}{b} = \phi$. Ako nastavimo takav postupak(sada bismo iz pravokutnika $EBCF$ izrezali kvadrat sa stranicom duljine b) opet bi nam ostao zlatni pravokutnik. Ovaj postupak možemo nastaviti u beskonačnost, a na slici 4.23 dana je geometrijska interpretacija tog postupka.



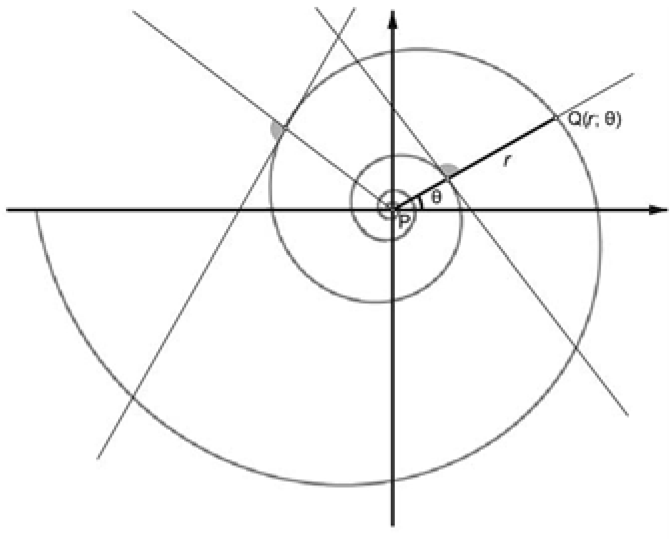
Slika 4.23

Ako u svakom kvadratu konstruiramo četvrtinu kruga, dobit ćemo spiralu koja približno odgovara zlatnoj spirali, što je vidljivo na sljedećoj slici 4.24.



Slika 4.24

Prava zlatna spirala se ne konstruira na taj način, ali ovo je dobra aproksimacija. Zlatna spirala je zapravo logaritamska spirala, a to je spirala za koju vrijedi da bilo koja tangenta sa radijusom spirale zatvara isti kut. Na slici 4.25 naznačena su dva takva kuta, koja zatvaraju dvije proizvoljno izabrane tangente sa radijusom spirale.



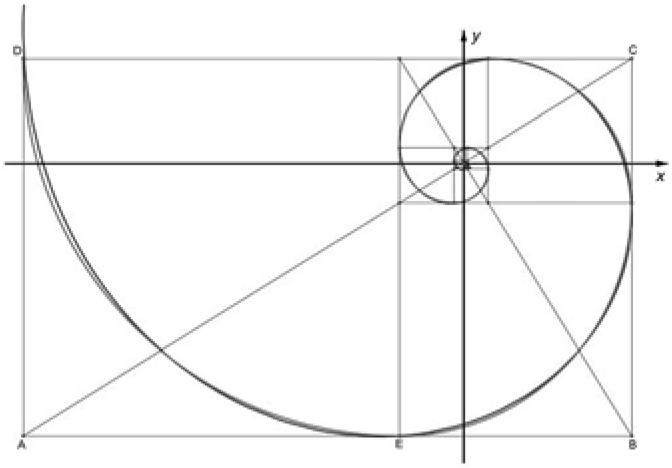
Slika 4.25

Točka P je središte spirale, zapravo točka u kojoj se sijeku dijagonale zlatnih pravokutnika koju smo već prethodno spominjali.

Duljina radijusa spirale eksponencijalno raste s polarnim kutom, θ. Promatrajući polarne koordinate (r, θ) dobi ćemo jednadžbu $r(\theta) = ae^{k\theta}$, gdje je θ mjera kuta kojeg radijus zatvara s osi x, a k i a su pozitivni realni brojevi. Kako svaka linija, od P do spirale (točka Q), svaki radijus, zatvara isti kut sa tangentom na krivulju, poznati francuski matematičar, Rene Descartes (1596.-1650.), nazvao je ovu krivulju jednakokutnom spiralom. Ime logaritamska spirala pripisuje se švicarskom matematičaru Jakobu Bernoulliu (1654.-1705.), koji ju je još nazvao i *spira mirabilis* (latinski za čudesna spirala). On je bio toliko očaran tom spiralom da je tražio da bude dio njegovog epitafa uz riječi *„Eadem mutata resurgo“*, što na latinskom znači

„Iako izmjenjen, ja ću se uzdići isti.“ No kipar koji je radio epitaf je umjesto logaritamske spirale isklesao Arhimedovu spiralu.

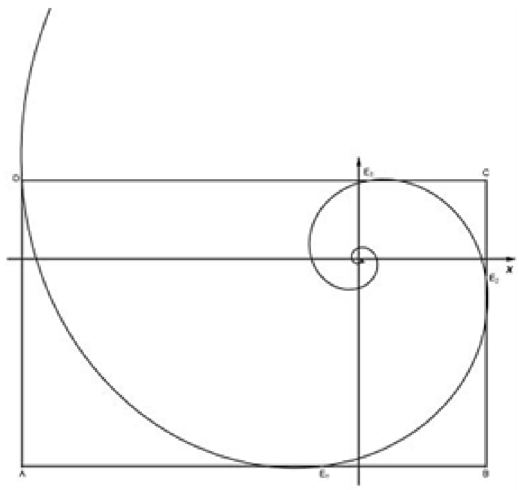
Na slici 4.26 možemo komparirati spiralu koju smo dobili pomoću konstrukcije četvrtine kruga u kvadratima i zlatne spirale.



Slika 4.26

Odstupanje je najviše uočljivo u velikom kvadratu

Središte spirala je sjecište dijagonala zlatnih pravokutnika. Pravci na kojima leže stranice pravokutnika su tangente konstruiranoj spirali, ali ne i zlatnoj spirali. Svaka stranica pravokutnika siječe spiralu u dvije točke. Na sljedećoj slici su prikazan ta sjecišta, točke $E_0, E_1, E_2, E_3, \ldots$, pri čemu je E_0 zapravo točka D.

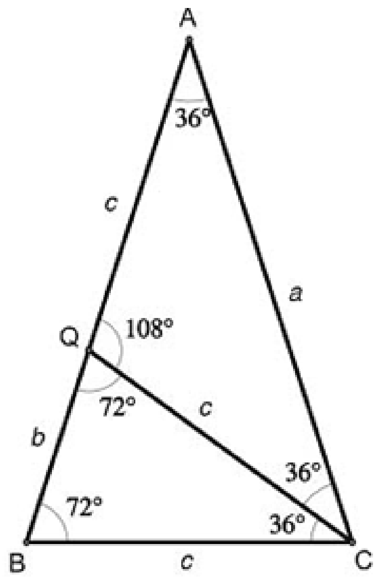


Slika 4.27

Zlatna spirala ja posebno zanimljiva po tome što je možemo uočiti u prirodi, promatrajući građu biljki i životinja, pojavljuje se također i u umjetnčkim djelima. O tome će više biti riječi u posljednjem poglavlju.

4.3 Zlatni trokut

Sljedeći geometrijski lik koji ćemo proučiti je zlatni trokut. Kod proučavanja svojstava zlatnog trokuta prilikom računanja omjera duljina odgovarajućih dužina javit će se broj ϕ.



Slika 4.28: Zlatni trokut

Na slici 4.87 imamo jednakokračan trokut ABC. Njegov vršni kut je 36°, a kutovi uz osnovicu su 72°. Ovakav trokut ABC se naziva zlatni trokut jer je omjer duljine kraka i osnovice jednak ϕ. Proučimo svojstva tog trokuta.

Konstruiramo li simetralu $\angle ACB$ imamo dva slična trokuta, ΔABC i ΔCQB čiji su kutovi prikazani na slici 4.28. Iz sličnosti ta dva trokuta slijedi jednakost omjera $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|BQ|}$ ili drugačije zapisano, $\frac{b+c}{c} = \frac{c}{b}$. U toj jednakosti možemo uočiti pojavljivanje zlatnog reza, što je vidljivo iz sljedećeg

$$\frac{b+c}{c} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ ili drugačije zapisano } \frac{a}{c} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi.$$

Pomoću prethodnih jednakosti možemo izraziti c i a pomoću b, a zatim a pomoću c:

$$\begin{aligned} c &= \phi \cdot b = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ a &= \phi \cdot c = \phi^2 \cdot b = (\frac{\sqrt{5}+1}{2})^2 b, \\ a &= \frac{\sqrt{5}+3}{2} b, \\ \phi^2 \cdot b &= (\phi + 1)b. \end{aligned}$$

U oba slučaja pojavio nam se broj ϕ. Pogledajmo sad što ćemo dobiti kada izrazimo a

pomoću c:

$$\begin{aligned}
a &= \phi \cdot c = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot c \\
b &= \frac{1}{\phi} \cdot c = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot c \\
c &= \frac{1}{\phi} \cdot a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot a \\
b &= \frac{1}{\phi^2} \cdot a = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot a.
\end{aligned}$$

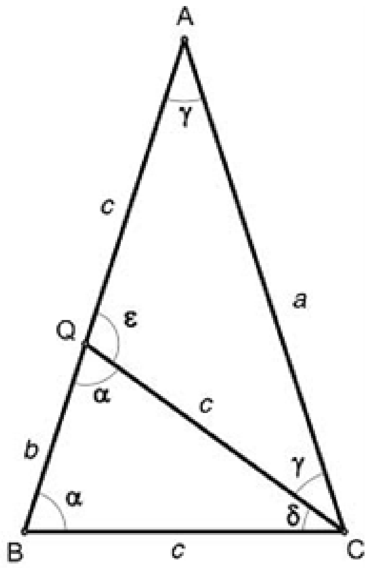
Naj slici 4.28 možemo uočiti tri zlatna torkuta: dva sa šiljastim vršnim kutom (ΔABC i ΔCQB), gdje je omjer duljina krakova i duljine osnovice sljedeći $\phi : 1$ ili $\frac{a}{c} = \frac{\phi}{1}$ te jedan sa tupim vršnim kutom, gdje je omjer duljina krakova prema duljini osnovice sljedeći $1 : \phi$ ili $\frac{c}{a} = \frac{1}{\phi}$. Kada bi na slici 4.29 iz svakog vršnog kuta tri zlatna trokuta konstruirali visine, formirali bi tri različita pravokutna trokuta. Koristeći Pitagorin teorem te trigonometrijske formule možemo dobiti zanimljive rezultate, u kojima se naravno opet krije broj ϕ. Ti rezultati su sljedeći:

$$\begin{aligned}
\sin 18^\circ = \cos 72^\circ &= \frac{1}{2\phi} \\
\sin 36^\circ = \cos 54^\circ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\phi^2+1}}{\phi} \\
\sin 54^\circ = \cos 36^\circ &= \frac{\phi}{2} \\
\sin 72^\circ = \cos 18^\circ &= \frac{\sqrt{\phi^2+1}}{2} \\
\operatorname{tg} 18^\circ = \operatorname{ctg} 72^\circ &= \frac{\sqrt{\phi^2+1}}{3\phi+1} \\
\operatorname{tg} 36^\circ = \operatorname{ctg} 54^\circ &= \frac{\sqrt{\phi^2+1}}{\phi^2} \\
\operatorname{tg} 54^\circ = \operatorname{ctg} 36^\circ &= \frac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}} \\
\operatorname{tg} 72^\circ = \operatorname{ctg} 18^\circ &= \phi\sqrt{\phi^2+1}.
\end{aligned}$$

Pogledajmo sada površinu zlatnog trokuta. Kako bi izračunali površinu zlatnog trokuta koristit ćemo sljedeću formulu

$$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma,$$

gdje su a i b duljine stranica trokuta, a γ je mjera kuta između te dvije stranice.



Slika 4.29

Iz slike 4.29, uz pripadne oznake, možemo izraziti sljedeće površine trokuta:

$$
\begin{aligned}
P_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin\angle BAC = \frac{1}{2} a^2 \sin\gamma = \frac{1}{2} a^2 \sin 36^\circ \\
&= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\phi^2+1}}{\phi} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, \\
P_{\Delta ACQ} &= \frac{1}{2} \cdot |AQ| \cdot |CQ| \cdot \sin\angle AQC = \frac{1}{2} c^2 \sin\varepsilon = \frac{1}{2} c^2 \sin 108^\circ \\
&= \frac{c^2}{2} \cdot 2 \sin 54^\circ \cos 54^\circ = c^2 \cdot \frac{\phi}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\phi^2+1}}{\phi} = \frac{c^2}{4} \cdot \sqrt{\phi^2+1} = \frac{c^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}},
\end{aligned}
$$

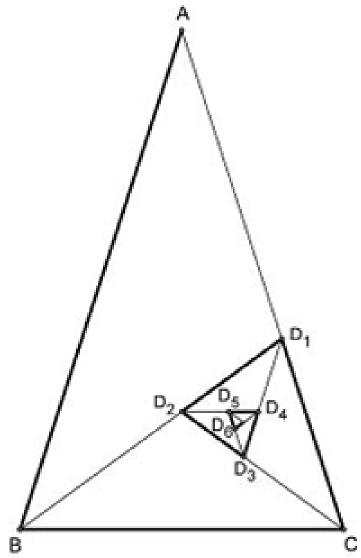
Kako iz prije pokazanog znamo da je $a = \phi c$, a $c = \phi b$ onda imamo da je $a = \phi^2 b$. Iz toga slijedi

$$
\begin{aligned}
P_{\Delta ABC} : P_{\Delta ACQ} &= \frac{\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{\frac{c^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} = \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{1}{\phi} = \frac{\phi^2 \cdot c^2}{c^2} \cdot \frac{1}{\phi} = \phi, \\
P_{\Delta ACQ} : P_{\Delta BCQ} &= \frac{\frac{c^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{\frac{c^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} = \frac{c^2}{c^2} \cdot \phi = \phi, \\
P_{\Delta ABC} : P_{\Delta BCQ} &= \frac{\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{\frac{c^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} = \frac{a^2}{c^2} \cdot 1 = \frac{\phi^2 \cdot c^2}{c^2} = \phi^2.
\end{aligned}
$$

Dakle, u omjerima površina ta tri trokuta uočavamo pojavljivanje broja ϕ.

$$P_{\Delta ABC} : P_{\Delta ACQ} : P_{\Delta BCQ} = \phi : 1 : \phi^{-1}.$$

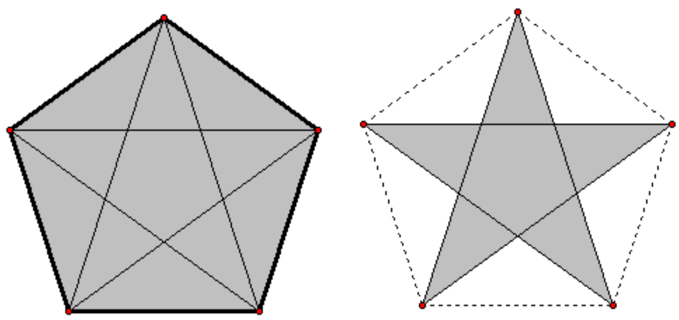
Spomenimo još jednu zanimljivu činjenicu koju možemo uočiti na slici 4.30. Imamo zlatni ΔABC i simetralu BD_1 $\angle ACB$, zatim CD_2 kao simetralu $\angle BCD_1$ pa možemo nastaviti dalje sa simetralama kuta $(D_1D_3, D_2D_4, D_3D_5, D_4D_6, \ldots, D_iD_{i+2})$ čime dobivamo nove $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$ trokute, ΔBCD_1, ΔCD_1D_2, $\Delta D_1D_2D_3$, $\Delta D_2D_3D_4$, $\ldots$, $\Delta D_iD_{i+1}D_{i+2}$, koji su svi redom zlatni trokuti.



Slika 4.30

4.4 Zlatni peterokut i pentagram

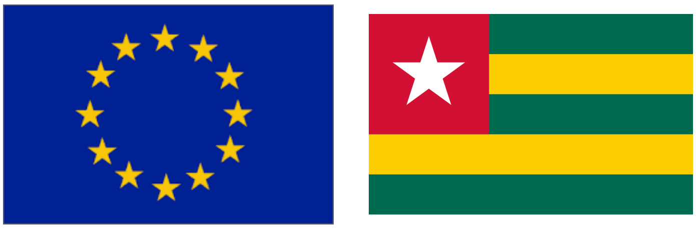
U ovom odjeljku proučit ćemo svojstva pravilnog peterokuta i pravilnog pentagrama. Kada u pravilnom peterokutu povučemo sve dijagonale pojavi se peterokraka zvijezda, koju nazivamo pravilni pentagram. Pokazat ćemo da se u omjerima duljina dužina prisutnim na ovim figurama može pronaći zlatni rez.



Slika 4.31

Pravilni pentagram je bio tajni simbol identifikacije Pitagorejaca čiji je član bio i Hippasus iz Metapontuma (oko 450. god.pr.Kr). On je otkrio da se omjer duljine dijagonale i duljine stranice pravilnog peterokuta ne može prikazati kao omjer dva cijela broja. To je zapravo pokrenulo otkriće iracionalnih brojeva, što je bilo vrlo uznemiravajuće za Pitagorejce jer su smatrali da se sve može prikazati pomoću cijelih brojeva pa su to otkriće tajili. Pentagram se kroz povijest provlači kao dio različitih simbola, a nalazi se na 60 zastava (slika 4.32).

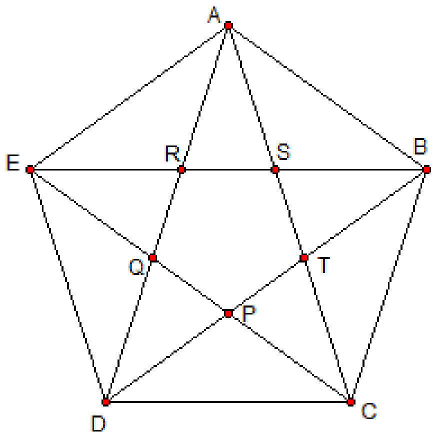
No krenimo sada na karakterizaciju pravilnog peterokuta i pentagrama. Pravilni peterokut ima sve stranice sukladne i sve unutarnje kuteve mjere 108°, i upravo se



(a) EU (b) Togo

Slika 4.32

takav peterokut još naziva i zlatni peterokut, a pentagram koji se u tom slučaju dobije poznat je i pod imenom zlatni pentagram. Ako uzmemo da je duljina stranice pravilnog peterokuta jednaka 1, onda se lako dobije da je duljina njegove dijagonale jednaka ϕ.

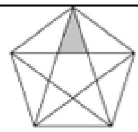
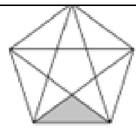
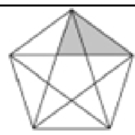
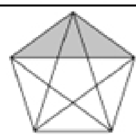
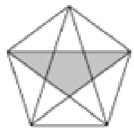
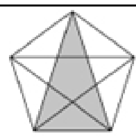


Slika 4.33

Primjetimo prvo da u pravilnom peterokutu i pentagramu možemo uočiti pet zlatnih trokuta,ΔADC, ΔBED, ΔCAE, ΔDAB i ΔEBC.
Možemo uočiti i da je svaka dijagonala paralelna sa nasuprotnom stranicom i da one svaki kut dijele na tri jednaka dijela. U pravilnom peterokutu možemo pronaći 35 trokuta koje možemo svrstati u pet kategorija prikazanih na slici 4.34. Trokuti tipa IV i V su sukladni, II i IV slični te I, III i V su slični. Sve su to zlatni trokuti.
Također, unutar pravilnog peterokuta možemo pronaći i različite četverokute, no bitnije je naznačiti da unutar peterokuta možemo pronaći još jedan peterokut, koji je opet zlatni peterokut, a povlačenjem njegovih dijagonala opet ćemo unutar njega dobiti pravilni peterokut. Isto vrijedi i za pravilni pentagram koji se dobije unutar pravilnog peterokuta.

Zlatni rez unutar zlatnog peterokuta i pentagrama krije se na sljedećim mjestima:

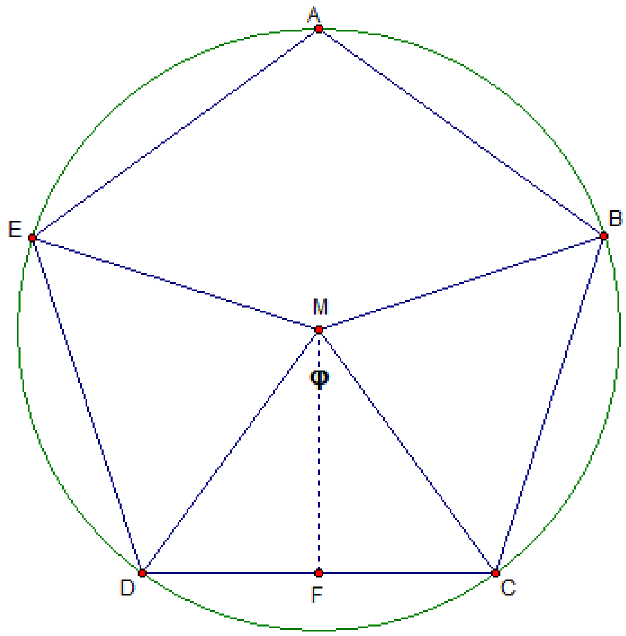
- u površini peterokuta,
- omjeru površine peterokuta i pentagrama,

TIP	PRIMJER
Tip I (5)	
Tip II (5)	
Tip III (10)	
Tip IV (5)	
Tip V (5)	
Tip VI (5)	

Slika 4.34

- omjeru radijusa upisane i opisane kružnice peterokuta,
- omjeru stranice peterokuta i radijusa opisane i upisane kružnice,
- stranice peterokuta i stranice pentagrama su u omjeru zlatnog reza,
- dijagonale peterokuta dijele jedna drugu u omjeru zlatnog reza.

Pogledajmo malo detaljnije na koji način dobijemo broj ϕ kada promatramo opisanu kružnicu peterokuta te njegovu površinu. Ostali dokazi o pojavama zlatnog reza unutar peterokuta mogu se pronaći u navedenoj literaturi.
Neka je radijus opisane kružnice R. Označimo središnji kut peterokuta sa φ, a njegova mjera je $72°$. Izrazit ćemo radijus opisane kružnice pomoću duljine stranice.
Iz pravokutnog trokuta CFM imamo $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{|CF|}{|CM|} = \frac{\frac{a}{2}}{R}$. Sada iz te formule možemo izraziti prvo a, a zatim i R, pri tome koristeći da je $\sin\frac{\varphi}{2}\sin 36° = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\phi^2+1}}{\phi}$, što je već razmatrano kod zlatnog trokuta.



Slika 4.35

Dakle, imamo

$$\begin{aligned} R &= \frac{a}{2}\frac{1}{\sin 36^\circ} = \frac{a}{2}\frac{2\phi}{\sqrt{\phi^2+1}} = a\frac{\phi}{\sqrt{\phi^2+1}}, \\ a &= 2R\sin 36^\circ = R\frac{\sqrt{\phi^2+1}}{\phi}. \end{aligned}$$

Iz toga sada lako možemo pogledati omjere duljine stranice i radijusa pravilnom peterokutu opisane kružnice,

$$\begin{aligned} \frac{R}{a} &= \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2+1}} \approx 0.8506508083, \\ \frac{a}{R} &= \frac{\sqrt{\phi^2+1}}{\phi} \approx 1.175570504 \end{aligned}$$

i uočavamo pojavljivanje broja ϕ. Zanimljivo je još da se radijusi pravilnom peterokutu opisane i upisane kružnice odnose kao $2 : \phi$, što se detaljnije može pronaći u [2] kao i razni drugi izvodi u kojima se pojavljuje broj ϕ.

Pogledajmo još u kakvom su odnosu površina peterokuta i pentagrama. Površinu peterokuta ćemo izraziti pomoću površine trokuta tipa IV i tipa VI.

$$\begin{aligned} P_{peterokut} &= 2 \cdot P_{IV} + P_{VI} \\ &= 2 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{\phi^2+1} + \frac{a^2}{4} \cdot \phi\sqrt{\phi^2+1} \\ &= \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{\phi^2+1} \cdot (2+\phi) \left(= \frac{5a^2}{4} \cdot \frac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2+1}} \right) \approx 1.720477400 \cdot a^2 \end{aligned}$$

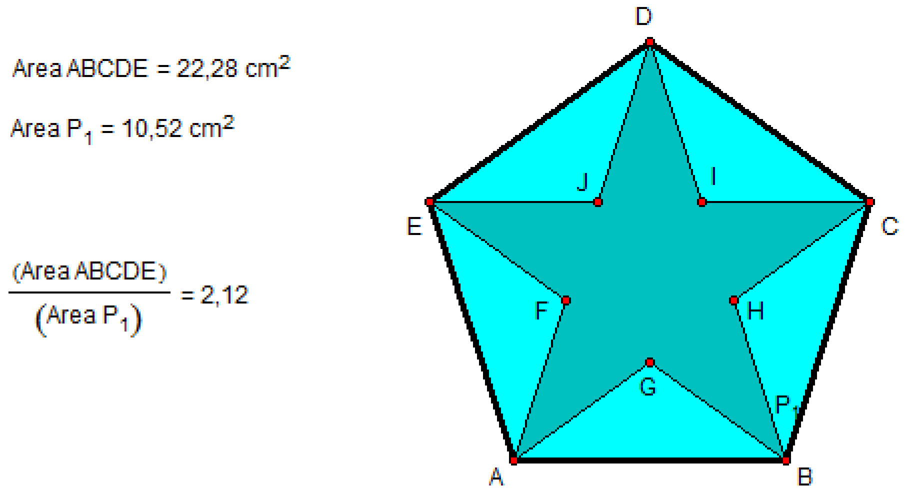
Površinu pentagrama ćemo izračunati tako da iz površine peterokuta uklonimo pet površina trokuta tipa II.

$$\begin{aligned} P_{pentagram} &= P_{peterokut} - 5 \cdot P_{II} \\ &= \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{\phi^2+1} \cdot (2+\phi) - 5 \cdot \frac{a^2}{4} \frac{\sqrt{\phi^2+1}}{\phi^2} \\ &= \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{\phi^2+1}(11\phi - 5\phi^2 - 3) \approx 0,8122992405 \cdot a^2 \end{aligned}$$

Sada kada imamo obje površine, nije teško dobiti njihov omjer. Omjer površine pravilnog peterokuta i površine njemu pripadnog pentagrama je sljedeći

$$\frac{P_{peterokut}}{P_{pentagram}} = \frac{\sqrt{5}+2}{2} = \phi + \frac{1}{2} \approx 2.118033988.$$

U programu Sketchpad lako se može konstruirati pravilni (zlatni) peterokut te unutar njega pentagram, a onda promatrati kolike su im površine i odgovarajući omjeri. Jedan takav primjer prikazan je na slici 4.36.



Slika 4.36

Već se u osnovnoj školi obrađuje konstrukcija pravilnog peterokuta. Postoji nekoliko metoda pomoću ravnala i šestara kojima se može konstruirati pravilni peterokut. Sve te metode se većinom svode na konstrukciju dvije dužine čije su duljine u omjeru $1 : \phi$. Jedna od takvih je i sljedeće konstrukcija prikazana kroz osam koraka:

1. Konstruirati kvadrat $ABCD$. Duljina stranice kvadrata će odgovarati duljini stranice peterokuta.

2. Odrediti polovište dužine $\overline{AB}$. Neka je to točka E.

3. Konstruirati kružni luk l_1 radijusa $|EC|$ sa središtem u točki E. Označimo presjek kružnog luka l_1 i pravca AB sa F.

4. Konstruirati kružni luk l_2 radijusa $|AB|$ sa središtem u točki A.

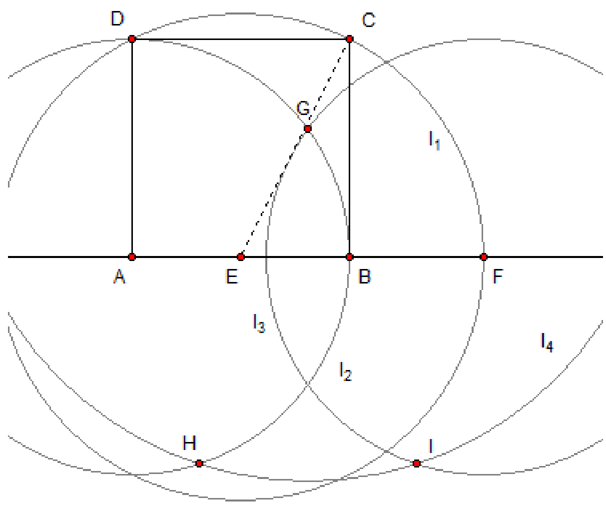
5. Konstruirati kružni luk l_3 radijusa $|AB|$ sa središtem u točki F.

6. Neka je točka G presjek kružnih lukova l_2 i l_3.

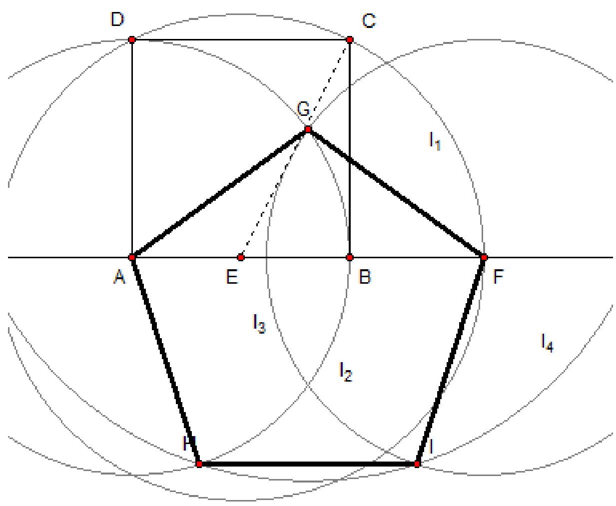
7. Konstruirati kružni luk l_4 radijusa $|AF|$ sa središtem u točki G.

8. Neka su točke H i I presjeci kružnog luka l_4 sa kružnim lukovima l_2 i l_3.

Točke A, G, F, I, H su vrhovi pravilnog peterokuta. Na sljedeće dvije slike dani su prikazi koraka konstrukcije.



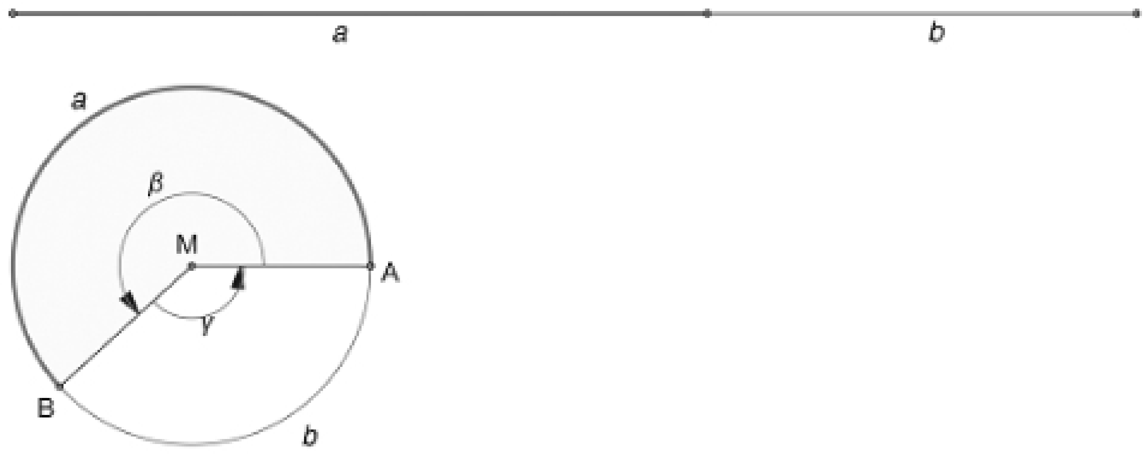
Slika 4.37



Slika 4.38

4.5 Zlatni kut

Kod zlatnog trokuta smo rekli da su mjere njegovih unutarnjih kutova 36°, 72° i 72° te smo pokazali kako se mogu vrijednosti sinusa odnosno kosinusa nekih kuteva izraziti preko ϕ. Kod zlatnog peterokuta smo naglašavali da su svi unutarnji kutevi jednaki i mjere 108°. U ovom dijelu će biti predstavljen kut koji se može prikazati u terminima zlatnog reza.



Slika 4.39: Zlatni kut

Neka imamo kut čiji krakovi dijele kružnicu na dva kružna luka čije se duljine nalaze u omjeru zlatnog reza. Koristeći prikaz i oznake na slici 4.39 onda bi kutovi β i γ bili u zlatnom omjeru:

$$\frac{opseg\, kružnice}{duljina\, luka\, a} = \frac{a+b}{a} = \frac{duljina\, luka\, a}{duljina\, luka\, b} = \phi$$

To možemo zapisati i na sljedeći način:

$$\frac{360°}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \phi.$$

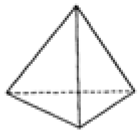
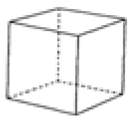
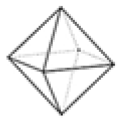
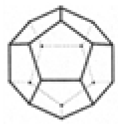
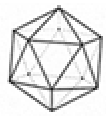
Sada možemo izračunati:

$$\begin{aligned}
\beta &= 222.492259...° \approx 222.5°, \\
\gamma &= 360° - \frac{360°}{\phi} = 137.5077640...° \approx 137.5°.
\end{aligned}$$

Kut γ, čija je mjera 137.5°, naziva se zlatni kut. Zlatni kut može se uočiti kod rasta raznih biljaka, a o tome će biti više riječi u zadnjem poglavlju.

4.6 Zlatni poliedri

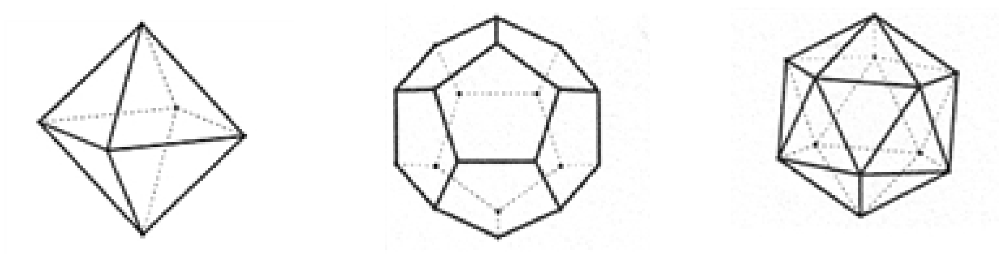
Pravilni poliedar je poliedar kojemu su sve strane sukladni pravilni mnogokuti, a iz svakog vrha izlazi jednak broj bridova. Može se dokazati da postoji samo pet pravilnih poliedara. Takvi poliedri se nazivaju Platonova tijela, prema filozofu Platonu koji ih je prvi spomenuo u svom djelu *Timaeus*, u kojim ti poliedri simboliziraju dijelove svemira. Velike zasluge idu i Euklidu koji je u svojem djelu *Elementi* opisao konstrukciju Platonovih tijela koristeći samo ravnalo i šestar te dokazao da su to jedini pravilni poliedri.

	TETRAEDAR	HEKSAEDAR (kocka)	OKTAEDAR	DODEKAEDAR	IKOZAEDAR
					
Broj vrhova	4	8	6	20	12
Broj bridova	6	12	12	30	30
Broj strana	4 (jednakostranični trokuti)	6 (kvadrati)	8 (jednakostranični trokuti)	12 (pravilni peterokuti)	20 (jednakostranični trokuti)

Slika 4.40: Platonova tijela

Platonova tijela imaju puno zanimljivih svojstava. Na primjer, mogu biti upisani u sferu i sfera može biti upisana u njih. Kako su to konveksni poliedri broj bridova b, broj vrhova v i broj strana s povezuje poznata Eulerova formua $v - b + s = 2$.

Pravilni oktaedar je jedino Platonovo tijelo koje može biti obojeno po principu šahovske ploče, odnosne stranice iste boje nemaju zajednički brid. No, nama je najzanimljivije pogledati ona svojstva Platonovih tijela koja u sebi kriju zlatni rez. U tom slučaju najzanimljiviji su: pravilni oktaedar, pravilni dodekaedar i pravilni ikozaedar.



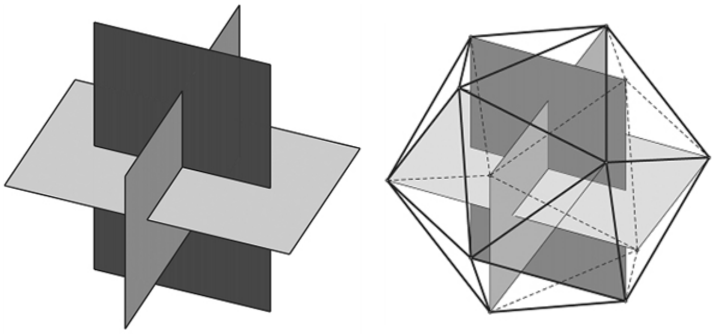
(a) Pravilni oktaedar (b) Pravilni dodekaedar (c) Pravilni ikozaedar

Slika 4.41

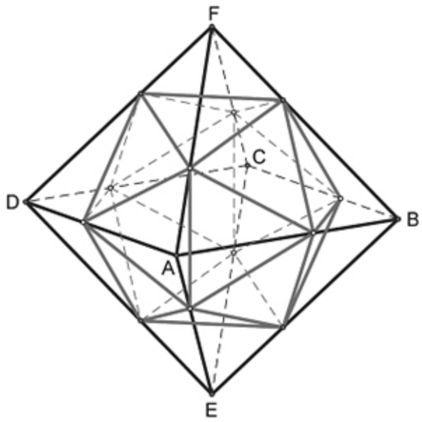
U pravilnom ikozaedru, 12 vrhova možemo spojiti tako da tvore tri sukladna zlatna pravokutnika koja su u parovima međusobno okomita (slika 4.42). Prvi je to otkrio Luca Pacioli u svom djelu *De Divina Proportione*.

Unutar pravilnog ikozaedra možemo upisati pravilne peterokute, a svaki njegov vrh je zajednički vrh pet jednakokračnih trokuta. U ovoj činjenici je već lako naslutiti da se kriju brojni zlatni omjeri.

Možemo primjetiti da pravilni oktaedar ima 12 bridova, a pravilni ikozaedar 12 vrhova pa bi onda mogli „uvući" pravilni ikozaedar u pravilni oktaedar tako da jedan brid

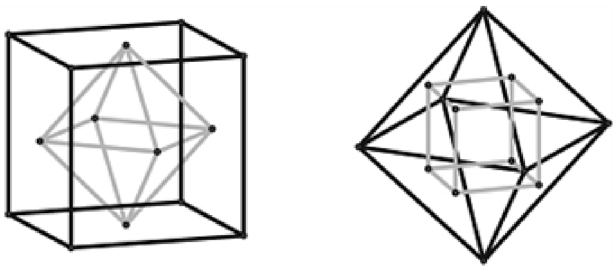


Slika 4.42

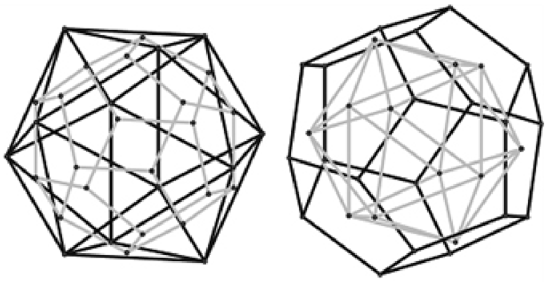


Slika 4.43: Ikozaedar unutar oktaedra

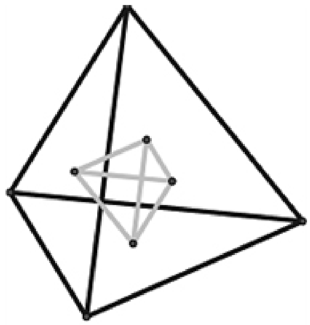
pravilnog oktaedra sadrži jedan vrh pravilnog ikozaedra (slika 4.43). U tom slučaju vrhovi pravilnog ikozaedra dijele bridove pravilnog oktaedra u omjeru zlatnog reza. Ako pogledamo Platonova tijela možemo uočiti kako se ono međusobno mogu dovesti u vezu. Na primjer, broj vrhova pravilnog heksaedra (kocke) je jednak broju strana pravilnog oktaedra i obratno. Ista relacija vrijedi za pravilni dodekaedar i pravilni ikozaedar. Takvi poliedri se nazivaju dualni poliedri. Zanimljivo je kako je pravilni tetraedar sam sebi dualan. Ova relacija dovodi do zanimljivih geometrijskih fenomena.



Slika 4.44: Dualnost kocke i oktaedra



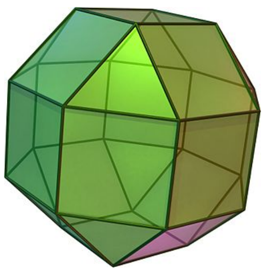
Slika 4.45: Dualnost dodekaedra i ikozaedra



Slika 4.46: Dualnost tetraedra

Koristeći središte stranice, može se geometrijski dokazati da dualnost poliedara vrijedi ako se mogu opisati i upisati jedan drugom, a na slikama možemo vidjeti kako to izgleda za kocku i pravilni oktaedar (slika 4.44) te pravilni dodekaedar i pravilni ikozaedar (slika 4.45). Naravno i u ovom slučaju se zlatni rez pojavljuje na različite načine, na primjer, središta peterokuta pravilnog ikozaedra su vrhovi tri sukladna, međusobno okomita, zlatna pravokutnika, upisana u njega.

Luca Pacioli, matematičar 15. stoljeća, pisao je o zlatnom rezu u svom djelu *De Divina Proportione*. Na poznatoj slici na kojoj se nalazi on sam, nalazi se i pravilni dodekaedar. Također na toj slici se nalazi rombikuboktaedron (slika 4.47), navodno je to prva pojava tog geometrijskog tijela, do pola napunjen vodom. Neki vjeruju da linija vode dijeli bridove u omjeru zlatnog reza. Još jedna zanimljiva relacija između poliedara je ta da se pravilni ikozaedar može upisati u kocku, tako da je duljina brida pravilnog ikozaedra jednaka duljem dijelu brida kocke podijeljenog u omjeru zlatnog reza.

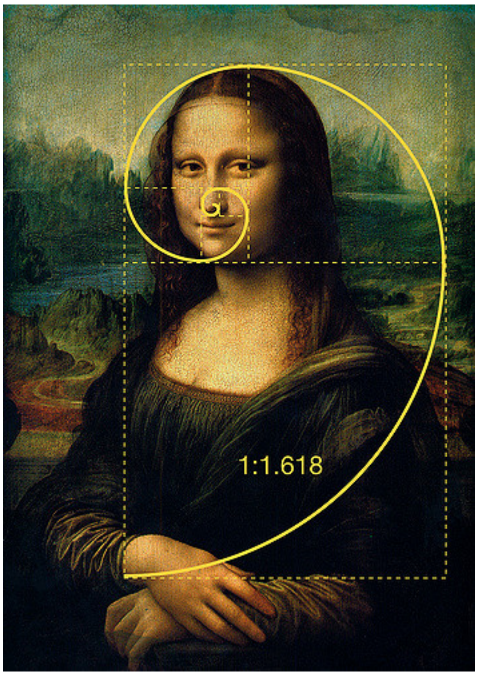


Slika 4.47: Rombikuboktaedron

5 Zanimljive pojave zlatnog reza

Istraživanja su potvrdila da su figure u kojima se krije podjela u omjeru zlatnog reza ili se duljine odgovarajućih stranica nalaze u omjeru zlatnog reza oku ugodne. Stoga je od interesa analizirati pojavu zlatnog reza u prirodi, umjetnosti, ljudskom tijelu, ali i u modernoj tehnologiji. U ovom poglavlju navest ćemo neke zanimljive primjere u kojima se krije zlatni rez.

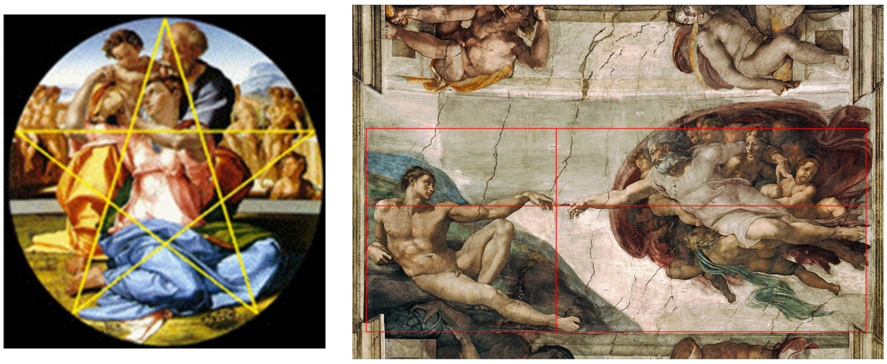
Počet ćemo s pojavom zlatnog reza u umjetničkim djelima. Već smo u prvom poglavlju opisali pojavu zlatnog reza kod Keopsove piramide i Vitruvianskog čovjeka, poznatog djela Leonarda da Vincia. Najpoznatije djelo ovog velikog umjetnika je Mona Lisa. Kompozicija djela krije prisutnost zlatnog reza. Na slici 5.47 možemo uočiti više zlatnih pravokutnika. Jedan zlatni pravokutnik je određen na sljedeći način, duljina jedne stranice je jednaka udaljenosti desnog zgloba ruke do lijevog lakta, a vertikalno ide od ravnine lijevog lakta do vrha glave. Ako u taj zlatni pravokutnik upisujemo kvadrate možemo uočiti da stranice kvadrata određuju sve žarišne točke žene na slici: njenu bradu, oči, nos i gornji rub njenih usta.



Slika 5.48: Mona Lisa

U Michelangelovom djelu „Sveta obitelj“ može se uočiti da su glavne figure na slici nacrtane tako da se uklapaju u pravilni pentagram (slika 5.49 (a)). U njegovom drugom djelu, „Stvaranje Adama“ (slika 5.49 (b)) koje se nalazi na stropu Sistinske kapele, ako pogledamo dio u kojem se nalaze Bog i Adam detaljnije, pronaći ćemo zlatni rez. Naime, Božji prst i Adamov prst se dodiruju u točki koja dijeli dio, visinu i širinu pravokutnika kojeg njih dvojica određuju, u omjeru zlatnog reza.

U djelima još mnogih umjetnika možemo pronaći zlatni rez, kao što su Raphaelova „Atenska škola“, Botticellievo „Rođenje Venere“, „Zlatne stepenice“ Edwarda Jonesa. . .

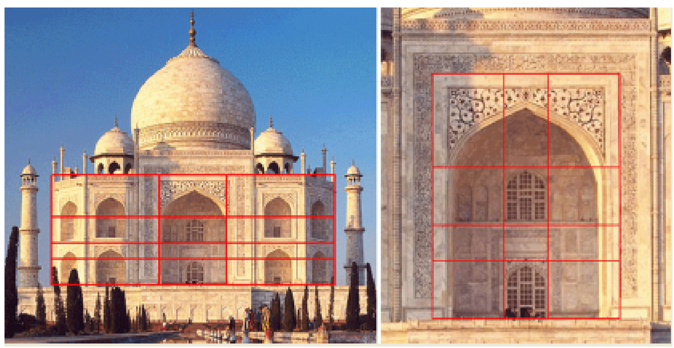


(a) Sveta obitelj

(b) Stvaranje Adama

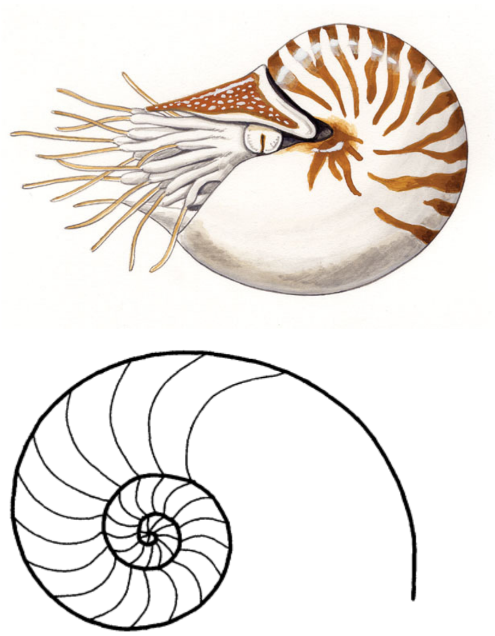
Slika 5.49

Također, osim u slikama, zlatni rez je prisutan i u brojnim građevinama. Već smo ranije spomenuli Partenon i Keopsovu piramidu. Partenon je primjer zlatne građevine u Grčkoj, a u Rimu bi to bio Panteon, jedan od rijetkih spomenika iz doba Antike koji je do danas sačuvan. Kada se pogleda njegov tlocrt, može se uočiti da se linija zlatnog reza nalazi na mjestu gdje se spajaju kupola i ulaz. U Rimu još imamo i Konstantinov slavoluk za kojeg vrijedi da su dimenzije njegovih glavnih elemenata u omjeru zlatnog reza. U brojnim katedralama i crkvama građenim u srednjem vijeku može se pronaći zlatni rez, jedan takav primjer je katedrala Notre-Dame. Zapadno pročelje obiluje odnosima definiranim zlatnim rezom, a uređenje unutrašnjosti utemeljeno je na pravilnom pentagramu i već je iz toga jasno da krije mnoštvo pojava zlatnog reza. Često se može čuti kako Taj Mahal izgleda savršeno, a razlog tome je što je njegova gradnja temeljena na zlatnom rezu. Svi pravokutnici koji su korišteni za vanjske okvire zlatni su pravokutnici kao i okvir glavnih vrata.



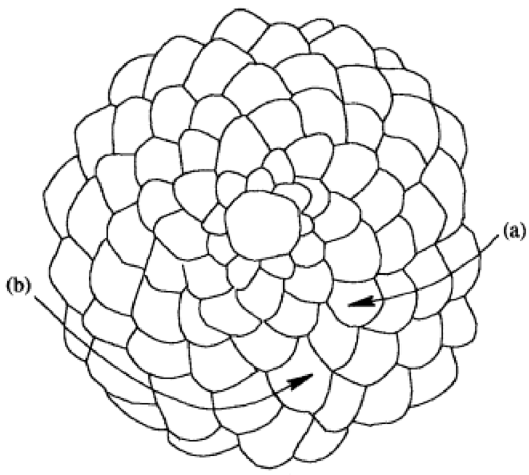
Slika 5.50: Taj Mahal

Već sam spomenula da se zlatni rez pojavljuje i u prirodi, u građi biljki i životinjskih tijela. Ono što najčešće možemo uočiti je zlatna spirala. Jedan od najljepših primjera zlatne spirale u prirodi je indijska lađica, morski mekušac čija je kućica prekrasni primjer prisustva zlatnog reza.

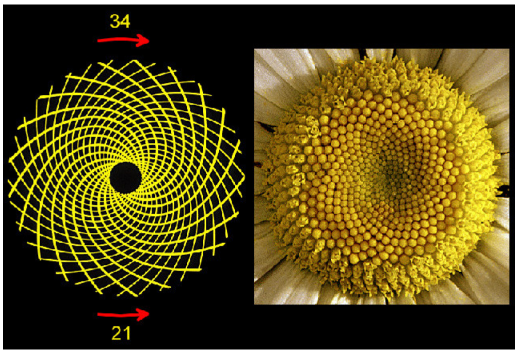


Slika 5.51: Indijska lađica

Dimenzije dijelova tijela nekih puževa, leptira, dupina, ptica, mravi su u omjeru zlatnog reza. Kada pogledamo biljni svijet, u građi češera možemo uočiti 13 spiralnih redova sjemenki u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu (na slici 5.52 označeno s a) i njih 8 u smjeru kazaljke na satu (na slici 5.52 označeno s b). Znamo da su brojevi 8 i 13 susjedni Fibonaccijevi brojevi, a za njih smo već utvrdili da im je omjer jednak 1.62. Slično, možemo pronaći i kod suncokreta, no u tom slučaju imamo 34 i 55 spiralnih redova, odnosno opet imamo dva susjedna Fibonaccijeva broja. Kod suncokreta (slika 5.53) je još zanimljivo i što se u svakom spiralnom redu nalazi 21 sjemenka, a 21 je prethodnik broja 34 u Fibonaccijevom nizu. Takve pojave se mogu još uočiti kod ananasa i raznih kaktusa.

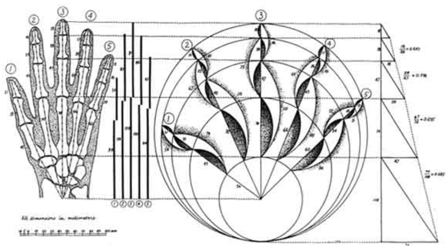


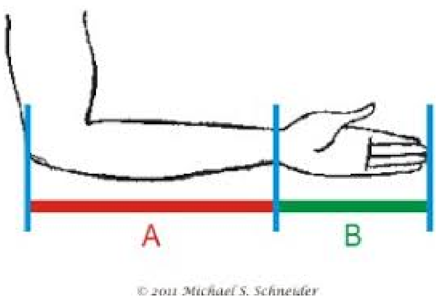
Slika 5.52: Češer



Slika 5.53: Suncokret

Pri rastu latica kod raznih cvjetova, cilj je da svaka latica raste tako da raspored latica bude optimalan u smislu količine sunca koje će svaka latica primiti, optimalan i u smislu izlaganja svoje površine kiši, koja se onda slijeva niz stabljiku do korijena. Svaka ta latica koja raste, raste u novom smjeru i uvijek pod istim kutom u odnosu na prethodnu laticu, a upravo je kut ono što daje optimalan raspored, a taj kut je jednak zlatnom kutu (137.5°).
Lice svakoga čovjeka, kao i njegovo tijelo je jedinstveno. No, kad se gleda neki prosjek cijele populacije i u građi ljudskog tijela možemo pronaći prisutnost broja ϕ. Savršeno lice, lice koji bi bilo u omjeru zlatnog reza, bi ležalo u zlatnom pravokutniku i to tako da su usta i nos smješteni u liniji zlatnog reza udaljenosti između očiju i vrha brade. U ljudskom uhu možemo uočiti zlatnu spiralu. Gledajući duljinu prstiju i duljinu svakog dijela prsta, određenog između dva zgloba, od vrha prsta do zgloba – vrijedi da je svaki sljedeći dio veći od prethodnog približno omjeru zlatnog reza. Također omjer duljine podlaktice i duljine dlana daje broj ϕ.


(a) Prsti ruke



(b) Podlaktica i dlan

Slika 5.54

Ni DNA molekula nije izbjegla zlatnom rezu. Omjer njene širine i duljine je zlatni omjer.
Današnji moderni svijet, moderna tehnologija teži što većem savršenstvu, a kako to bolje postići nego iskoristiti zlatni rez. Tako danas mnoge tvrtke pri dizajnu svog loga teže da proporcije tog loga u sebi skrivaju broj ϕ. Primjer takvog dizajna bi bila tvrtka Apple ili National Geographic.

Slika 5.55

Kada bi promotrilii svoje kreditne kartice i izmjerili njihove dimenzije dobili bi da je njihova duljina 8.5 cm, a širina 5.4 cm, a kad ta dva broja podijelimo dobijemo 1.6. Mnogi uređaji su dizajnirani tako da omjer njihovih dimenzija bude što bliže zlatnom rezu, na primjer iPhone 5 tvrtke Apple. Osim toga, pri dizajnu web stranica neki paze da one budu u omjeru zlatnog reza, a jedan od primjera takve web stranica je Twittera.

6 Zaključak

Pojavljivanje konstante zlatnog reza seže daleko u povijest ljudske civilizacije. Podjela dužine u omjeru zlatnog reza smatra se oku vrlo ugodnom što su potvrdila i brojna istraživanja. Stoga ne začuđuje pojava ove konstante pri kompoziciji poznatih i cijenjenih umjetničkih djela i značajnih građevina. Postoje i brojne geometrijske konstrukcije podjele dužine u omjeru zlatnog reza. Mnoge geometrijske figure kriju postojanje konstante zlatnog reza. Postoje i brojne poveznice vrijednosti ove konstante s drugim važnim matematičkim pojmovima. U ovom radu smo razmatrali zanimljiva svojstva konstante zlatnog reza, geometrijske konstrukcije podjele dužine u tom omjeru te proučili prisutnost ove konstante u različitim geometrijskim figurama. Razmatrano je i pojavljivanje ove konstante u prirodi.

Sažetak

Dužina je podijeljena u omjeru zlatnoga reza, ako je omjer duljine većega dijela dužine prema duljini manjeg dijela jednak omjeru duljine cijele dužina prema duljini većega dijela. To je iracionalan broj koji se označava slovom ϕ, a njegova vrijednost je $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i približno je jednaka 1.61803. Razlika konstante zlatnog reza i njegove recipročne vrijednosti je 1. Poznate su brojne konstrukcije zlatnog reza. U radu su navedene neke od konstrukcija. Razmatrana su svojstva figura kao što su zlatni pravokutnik, zlatni trokut, pravilni peterokut te analizirani omjeri dužina u tim figurama koji su jednaki ϕ. Navedena su i proučavana geometrijska tijela kod kojih je također na različite načine uočeno postojanje broja ϕ. Pojavljuje se još od davnina, kod Keopsove piramide i Partenona. Broj ϕ se javlja i u brojnim poznatim umjetničkim djelima te u građi živog svijeta što je također proučavano u radu. U novije vrijeme u dizajnu logo znakova, web stranica i uređaja se često susreće postojanje ovog oku ugodnog omjera.

Ključne riječi: zlatni rez, zlatni pravokutnik, zlatni trokut, pravilni peterokut.

Summary

If a line segment is divided into two lengths such that the ratio of the longer length to the shorter length is equal to the ratio of the segment's entire length to the longer length, then the segment has been divided into the Golden Ratio. This is an irrational number that is denoted with ϕ and its value is $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ and is approximately equal 1.61803. The difference of the golden ratio constant and its reciprocal is 1. There are many construction of the golden ratio. In this thesisare mentioned some constructions. There are considered the properties of a figures such as a golden rectangle, a golden triangle, a regular pentagon and the analyzed ratios of lengths in those figures which are equal to ϕ. The geometrical shapes at which the existence of the ϕ number was noticed on diferent ways were stated and studied. It has appeared since ancient times, at the Keops Pyramid and Parthenon. It appears in famous works of art, in the structure of living world which has also been mentioned. In the resent time in the design of logos, web-pages and devices, the existence of this eye pleasing ratio is often being encountered.

Keywords: golden ration, golden rectangle, golden triangle, regular pentagon.

Literatura

[1] R. Dunlap, *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, Singapore, World Scientific, 1997.

[2] A. Posamentier, I. Lehmann,, *The Glorious Golden Ratio*, New York, Prometheus Books, 2012.

[3] S. Zlatić, *Zlatni rez*, Technical journal 7, **1**(2013), 84–90.

[4] *The Golden Number*,
URL: `https://www.goldennumber.net/`

Životopis

Zovem se Kristina Katušić i rođena sam 17. siječnja 1994. godine u Slavonskom Brodu. Živim u obiteljskoj zajednici s ocem Robertom, majkom Anom te dvojicom mlađe braće, Kristijanom i Tomislavom. Osnovnu školu sam upisala 2000. godine. U 6. razredu sudjelovala sam na županijskom natjecanju iz informatike. Nakon završetka osnovne škole 2008. godine uspisujem se u Gimnaziju Matija Mesić, usmjerenje opća gimnazija, u Slavonskome Brodu. 2012. godine upisujem integrirani nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku, Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku.